

## Ασκήσεις ΠΣΔ

### Α. Διατύπωση μοντέλου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Μια επιχείρηση παράγει 3 προϊόντα και έχει 4 διαθέσιμα εργοστάσια. Ο χρόνος παραγωγής (σε λεπτά) για κάθε προϊόν διαφέρει από εργοστάσιο σε εργοστάσιο όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	Χρόνοι παραγωγής			
	Εργοστάσιο 1	Εργοστάσιο 2	Εργοστάσιο 3	Εργοστάσιο 4
Προϊόν 1	5	7	4	10
Προϊόν 2	6	12	8	15
Προϊόν 3	13	14	9	17

Αντίστοιχα το κέρδος ανά παραγόμενη μονάδα διαφέρει μεταξύ των εργοστασίων όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	Κέρδος ανά μονάδα			
	Εργοστάσιο 1	Εργοστάσιο 2	Εργοστάσιο 3	Εργοστάσιο 4
Προϊόν 1	10	8	6	9
Προϊόν 2	18	20	15	17
Προϊόν 3	15	16	13	17

Αν για μια εβδομάδα διατίθενται 35 εργάσιμες ώρες σε κάθε εργοστάσιο ποια θα πρέπει να είναι η ποσότητα που θα παραχθεί από κάθε εργοστάσιο για κάθε προϊόν δεδομένου ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον 100 μονάδες από το προϊόν 1, 150 μονάδες από το προϊόν 2 και 100 μονάδες από το προϊόν 3. Να διατυπωθεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

### Λύση

#### Μεταβλητές

Θα πρέπει να αποφασιστεί ο αριθμός από κάθε είδος προϊόντος που θα κατασκευαστεί. Ειδικότερα θα πρέπει να αποφασιστεί ο αριθμός από κάθε είδος προϊόντος που θα κατασκευαστεί στο εργοστάσιο 1, στο εργοστάσιο 2 και στο εργοστάσιο 3. Συνεπώς ορίζουμε:

$x_{ij}$  = ποσότητα από το προϊόν  $i$  ( $i=1,2,3$ ) που θα κατασκευαστεί στο εργοστάσιο  $j$  ( $j=1,2,3,4$ ) ανά εβδομάδα.

#### Περιορισμοί

##### Περιορισμός διαθέσιμου χρόνου σε κάθε εργοστάσιο

$$5 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{21} + 13 \cdot x_{31} \leq 35 \cdot 60$$

$$7 \cdot x_{12} + 12 \cdot x_{22} + 14 \cdot x_{32} \leq 35 \cdot 60$$

$$5 \cdot x_{13} + 6 \cdot x_{23} + 13 \cdot x_{33} \leq 35 \cdot 60$$

$$5 \cdot x_{14} + 6 \cdot x_{24} + 13 \cdot x_{34} \leq 35 \cdot 60$$

##### Περιορισμοί κατώτατων ορίων παραγωγής για κάθε προϊόν

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 150$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 100$$

##### Περιορισμοί μη αρνητικότητας

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$$

### Συνάρτηση στόχος (αντικειμενική συνάρτηση)

$$\text{Maximize: } 10 \cdot x_{11} + 8 \cdot x_{12} + 6 \cdot x_{13} + 9 \cdot x_{14} + 18 \cdot x_{21} + 20 \cdot x_{22} + 15 \cdot x_{23} + 17 \cdot x_{24} + 15 \cdot x_{31} + 16 \cdot x_{32} + 13 \cdot x_{33} + 17 \cdot x_{34}$$

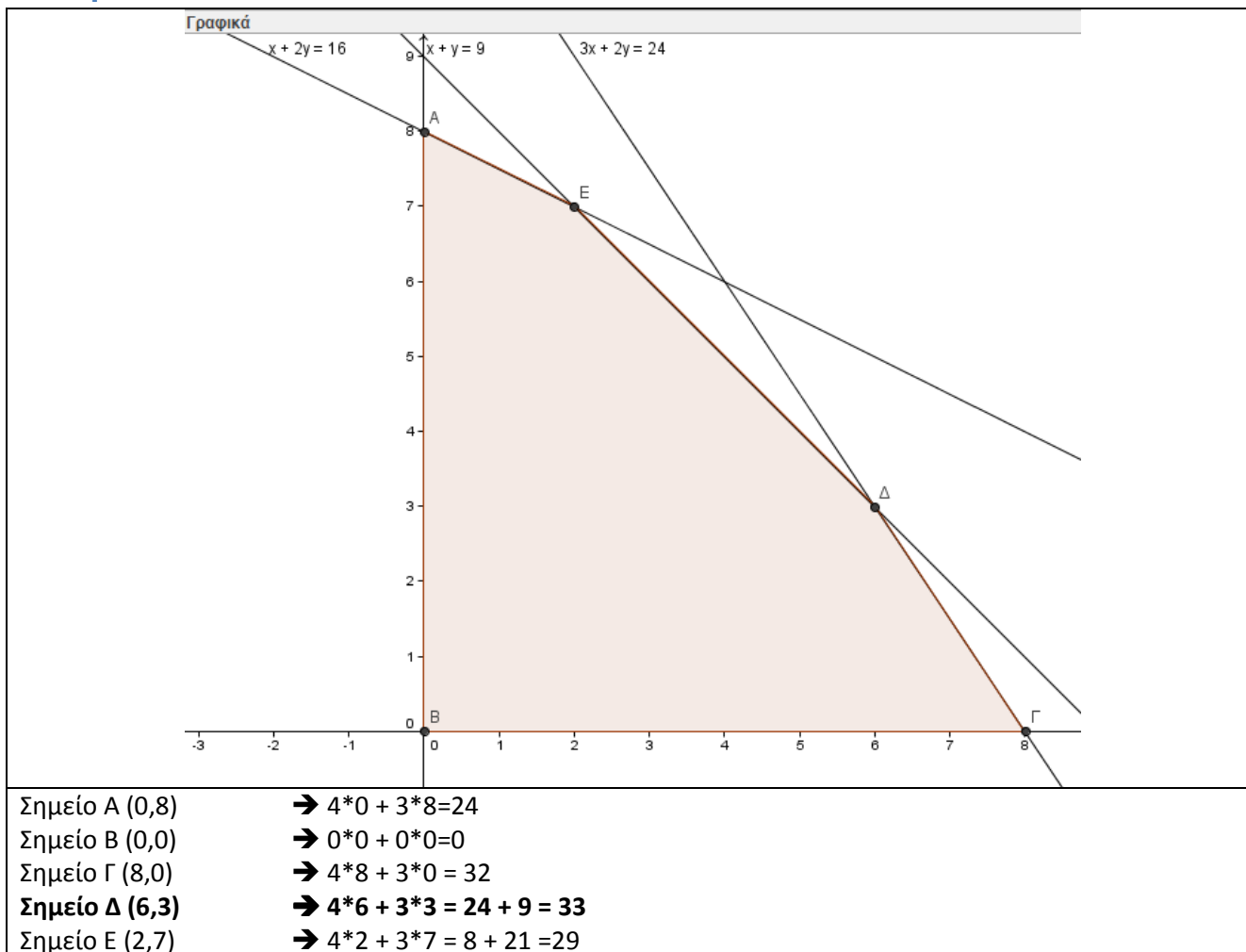
Πηγή: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/or/lpmore.html>

### Β. Γεωμετρική απεικόνιση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού στις 2 διαστάσεις

$$\begin{aligned} \text{Maximize: } & 4 \cdot x + 3 \cdot y \\ \text{Subject to: } & x + 2 \cdot y \leq 16 \\ & x + y \leq 9 \\ & 3 \cdot x + 2 \cdot y \leq 24 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Να σχεδιάσετε την εφικτή περιοχή του παραπάνω προβλήματος. Να υπολογιστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής και να βρεθεί η κορυφή που την μεγιστοποιεί.

### Λύση



Πηγή: <http://people.richland.edu/james/ictcm/2006/geometric.html>

## Γ. Πιθανότητα υπό όρους

Η Μαρία παντρεύεται αύριο σε μια τελετή που θα γίνει αύριο σε ανοιχτό χώρο σε ένα νησί που σπάνια βρέχει. Στα τελευταία έτη έχει βρέξει μόνο 5 ημέρες τον χρόνο. Ο μετεωρολόγος πρόβλεψε όμως βροχή για αύριο. Είναι γνωστό ότι ο μετεωρολόγος προβλέπει την βροχή σωστά με πιθανότητα 90%. Όταν δεν βρέχει η πιθανότητα να προβλέψει βροχή ο μετεωρολόγος είναι 10%. Ποια είναι η πιθανότητα να βρέξει στην ημέρα του γάμου της Μαρίας.

### Λύση

Γεγονός A1: Θα βρέξει στον γάμο της Μαρίας  
Γεγονός A2: Δεν θα βρέξει στο γάμο της Μαρίας  
Γεγονός B: Ο μετεωρολόγος προβλέπει βροχή

$$P(A1) = 5/365 = 0,014$$

$$P(A2) = 360/365 = 0,986$$

$$P(B|A1) = 0,9$$

$$P(B|A2) = 0,1$$

$$P(A1|B) = P(A1) \cdot P(B|A1) / (P(A1) \cdot P(B|A1) + P(A2) \cdot P(B|A2)) = 0,014 \cdot 0,9 / (0,014 \cdot 0,9 + 0,986 \cdot 0,1) = 0,111$$

Δηλαδή η πιθανότητα να βρέξει ακόμα και αν ο μετεωρολόγος έχει προβλέψει βροχή είναι μόλις 11%!

Πηγή: <http://stattrek.com/lesson1/bayes.aspx>

## Δ. Αβεβαιότητα – προσδοκώμενο κέρδος

Μια επιχείρηση προτίθεται να ξεκινήσει την παραγωγή ενός προϊόντος. Για την παραγωγή εξετάζει το ενδεχόμενο της ενοικίασης μικρής γραμμής παραγωγής με δυνατότητα 3.000 τεμάχια ανά ημέρα και μιας μεγάλης γραμμής παραγωγής με δυνατότητα 6.000 τεμάχια την ημέρα. Το ημερήσιο κόστος ενοικίασης και λειτουργίας είναι 10.000 και 20.000 αντίστοιχα.

Η επιχείρηση δεν γνωρίζει τη ακριβή ζήτηση για το προϊόν της. Εκτιμά ότι θα υπάρξει «μέτρια ζήτηση» 2.000 τεμαχίων ανά ημέρα με 70% πιθανότητα και «υψηλή ζήτηση» 5.000 τεμαχίων ανά ημέρα με πιθανότητα 30%. Η τιμή με την οποία θα διατίθεται το προϊόν στην αγορά θα είναι προς 20€ το τεμάχιο ενώ το κόστος κατασκευής του θα είναι 14€ σε περίπτωση που επιλεγεί η μικρή γραμμή παραγωγής και 12€ αν επιλεγεί η μεγάλη γραμμή παραγωγής.

A) Ποια γραμμή παραγωγής συμφέρει να ενοικιαστεί (θεωρείστε ότι τα τεμάχια που δεν πωλούνται απορροφούνται με τιμή την αξία παραγωγής τους ανά περίπτωση);

B) Ποιο είναι το προσδοκώμενο κέρδος της τέλει πληροφορίας για το σενάριο του ερωτήματος A και ποια η αξία της τέλει πληροφορίας;

Γ) Αν η υπολειμματική αξία των τεμαχίων που παράγονται είναι 15€ ποια γραμμή παραγωγής συμφέρει να ενοικιαστεί;

### Λύση

A) Υπάρχουν 2 εναλλακτικές αποφάσεις που μπορούν να ληφθούν και 2 πιθανές καταστάσεις που μπορούν να συμβούν. Άρα συνολικά υπάρχουν 4 ενδεχόμενα. Ο τύπος που δίνει το κέρδος είναι:

$$\text{Κέρδος} = ((20 - \text{κόστος\_κατασκευής}) * \min(\text{ποσότητα\_παραγωγής, ζήτηση})) - \text{κόστος\_ενοικίασης}$$

1) Μικρή γραμμή παραγωγής – μικρή ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20 - 14) * \min(3.000, 2.000) - 10.000 = 2.000$$

2) Μικρή γραμμή παραγωγής – μεγάλη ζήτηση

Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Ελεγκτικής

$$\text{Κέρδος} = (20-14) * \min(3.000, 5.000) - 10.000 = 8.000$$

3) Μεγάλη γραμμή παραγωγής – μικρή ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-12) * \min(6.000, 2.000) - 20.000 = -4.000$$

4) Μεγάλη γραμμή παραγωγής – μεγάλη ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-12) * \min(6.000, 5.000) - 20.000 = 20.000$$

$$\text{EV(μικρή γραμμή παραγωγής)} = 70\% * 2.000 + 30\% * 8.000 = 3.800$$

$$\text{EV(μεγάλη γραμμή παραγωγής)} = 70\% * -4.000 + 30\% * 20.000 = 3.200$$

Β) Αν γνωρίζουμε την ζήτηση εκ των προτέρων μπορούμε να επιλέξουμε την καλύτερη εναλλακτική σε σχέση με το επίπεδο ζήτησης. Άρα για κάθε ζήτηση το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στο υψηλότερο κέρδος.

	Μικρή ζήτηση	Μεγάλη ζήτηση
Μικρή γραμμή παραγωγής	<b>3.000</b>	<b>8.000</b>
Μεγάλη γραμμή παραγωγής	-4000	3.200
	70%	30%

Αν υπάρξει μικρή ζήτηση η καλύτερη εναλλακτική είναι η μικρή γραμμή παραγωγής.

Αν υπάρξει μεγάλη ζήτηση η καλύτερη εναλλακτική είναι πάλι η μικρή γραμμή παραγωγής.

Το προσδοκώμενο κέρδος έχοντας στην διάθεσή μας την τέλεια πληροφορία υπολογίζεται ως εξής

$$\text{EVPI} = 70\% * 2000 + 30\% * 8000 = 3.800$$

Όμως το προσδοκώμενο κέρδος ήταν ήδη 3.800 άρα η αξία της τέλει πληροφορίας για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι  $\text{EVPI} - \text{EV} = 3.800 - 3.800 = \text{μηδέν}$ .

Γ) Ο τύπος που δίνει τώρα το κέρδος για τις περιπτώσεις που η ζήτηση είναι μικρότερη της ποσότητας παραγωγής (1, 3 και 4) είναι:

$$\text{Κέρδος} = ((20 - \text{κόστος\_κατασκευής}) * \min(\text{ποσότητα\_παραγωγής, ζήτηση})) - \text{κόστος\_ενοικίασης} + (15 - \text{κόστος\_κατασκευής}) * (\text{ποσότητα\_παραγωγής} - \text{ζήτηση})$$

1) Μικρή γραμμή παραγωγής – μικρή ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-14) * \min(3.000, 2.000) - 10.000 + (3.000-2.000)*(15-14) = 3.000$$

2) Μικρή γραμμή παραγωγής – μεγάλη ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-14) * \min(3.000, 5.000) - 10.000 = 8.000$$

3) Μεγάλη γραμμή παραγωγής – μικρή ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-12) * \min(6.000, 2.000) - 20.000 + (6.000-2.000)*(15-12) = 8.000$$

4) Μεγάλη γραμμή παραγωγής – μεγάλη ζήτηση

$$\text{Κέρδος} = (20-12) * \min(6.000, 5.000) - 20.000 + (6.000-5.000)*(15-12) = 23.000$$

$$\text{EV(μικρή γραμμή παραγωγής)} = 70\% * 3.000 + 30\% * 8.000 = 4.500$$

$$\text{EV(μεγάλη γραμμή παραγωγής)} = 70\% * 8.000 + 30\% * 23.000 = 12.500$$

## Ε. Προσομοίωση

Έστω μια Τράπεζα που εξυπηρετεί του πελάτες της λειτουργώντας 2 ταμεία.

- Οι χρόνοι αφίξεων μεταξύ των πελατών είναι εκθετικά κατανομημένοι με μέση τιμή τα 2 λεπτά. Δηλαδή ο αριθμός των πελατών που έρχονται για εξυπηρέτηση και εισέρχονται στην γραμμή αναμονής μέσα σε μια ώρα έχει κατανομή Poisson με μέση τιμή  $60/2=30$  πελάτες την ώρα.
- Ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών από τον ταμιά 1 είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή τα 5 λεπτά ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης από τον ταμιά 2 είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή τα 4 λεπτά.
- Πραγματοποιείται προσομοίωση η οποία δίνει τις ακόλουθες τιμές:
  - Διαστήματα μεταξύ αφίξεων διαδοχικών πελατών: 2,2,2,0,3,0,1,2,1,...
  - Χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών από τον Ταμιά 1: 6,1,4,4,4,2,...
  - Χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών από τον Ταμιά 2: 6,5,7,3,3,...

Θεωρείστε ότι αν και τα δυο ταμεία είναι διαθέσιμα ο πελάτης εξυπηρετείται από το ταμείο 1. Θεωρείστε ότι ο πρώτος πελάτης εμφανίζεται την χρονική στιγμή μηδέν.

Α) Να συμπληρωθεί ο ακόλουθος πίνακας με την εξέλιξη της ουράς αναμονής για την Τράπεζα για τους 9 πρώτους πελάτες.

Χρόνος	Άφιξη πελάτη ή πελατών	Διάρκεια μέχρι την επόμενη άφιξη	Ταμιάς 1	Ταμιάς 2	Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης και διάρκεια παραμονής στο σύστημα
0	Πελάτης 1	2	Πελάτης 1	Διαθέσιμος	
1			Πελάτης 1	Διαθέσιμος	
2	Πελάτης 2	2	Πελάτης 1	Πελάτης 2	
3			Πελάτης 1	Πελάτης 2	
4			Πελάτης 1	Πελάτης 2	
5			Πελάτης 1	Πελάτης 2	Πελάτης 1 → 6 λεπτά
6				Πελάτης 2	
7				Πελάτης 2	

Β) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής πελατών στο σύστημα; Ποιος είναι ο πελάτης που έμεινε περισσότερη ώρα στο σύστημα;

Γ) Ποια θα είναι η μορφή του πίνακα αν υπάρχει μόνο ο ταμιάς 1. Συμπληρώστε τον νέο πίνακα μόνο για τις 5 πρώτες αφίξεις πελατών. Ποιος είναι τώρα ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα;

## Λύση

Α) Εξέλιξη της ουράς αναμονής:

Χρόνος	Άφιξη πελάτη ή πελατών	Διάρκεια μέχρι την επόμενη άφιξη	Ταμιάς 1	Ταμιάς 2	Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης και διάρκεια παραμονής στο σύστημα
0	Πελάτης 1	2	Πελάτης 1	Διαθέσιμος	
1			Πελάτης 1	Διαθέσιμος	
2	Πελάτης 2	2	Πελάτης 1	Πελάτης 2	
3			Πελάτης 1	Πελάτης 2	
4	Πελάτης 3	2	Πελάτης 1	Πελάτης 2	
5			Πελάτης 1	Πελάτης 2	Πελάτης 1 → 6 λεπτά
6	Πελάτες 4 και 5	0,3	Πελάτης 3	Πελάτης 2	Πελάτης 3 → 3 λεπτά
7			Πελάτης 4	Πελάτης 2	Πελάτης 2 → 6 λεπτά
8			Πελάτης 4	Πελάτης 5	
9	Πελάτες 6 και 7	0,1	Πελάτης 4	Πελάτης 5	
10	Πελάτης 8	2	Πελάτης 4	Πελάτης 5	Πελάτης 4 → 5 λεπτά

11			Πελάτης 6	Πελάτης 5	
12	Πελάτης 9	1	Πελάτης 6	Πελάτης 5	Πελάτης 5 → 7 λεπτά
13	Πελάτης 10	...	Πελάτης 6	Πελάτης 7	
14			Πελάτης 6	Πελάτης 7	Πελάτης 6 → 6 λεπτά
15			Πελάτης 8	Πελάτης 7	
16			Πελάτης 8	Πελάτης 7	
17			Πελάτης 8	Πελάτης 7	
18			Πελάτης 8	Πελάτης 7	Πελάτης 8 → 6 λεπτά
19			Πελάτης 9	Πελάτης 7	Πελάτης 7 → 11 λεπτά
20			Πελάτης 9	Πελάτης 10	Πελάτης 9 → 9 λεπτά
21				Πελάτης 10	
22				Πελάτης 10	Πελάτης 10 → 10 λεπτά

Β) Μέση παραμονή πελατών στο σύστημα=  $(6+3+6+5+7+6+6+11+9+10)/10 = 6,9$ .

Ο πελάτης 7 έμεινε περισσότερο στο σύστημα (11 λεπτά)

Γ) Εξέλιξη της ουράς αναμονής με δύο ταμίες:

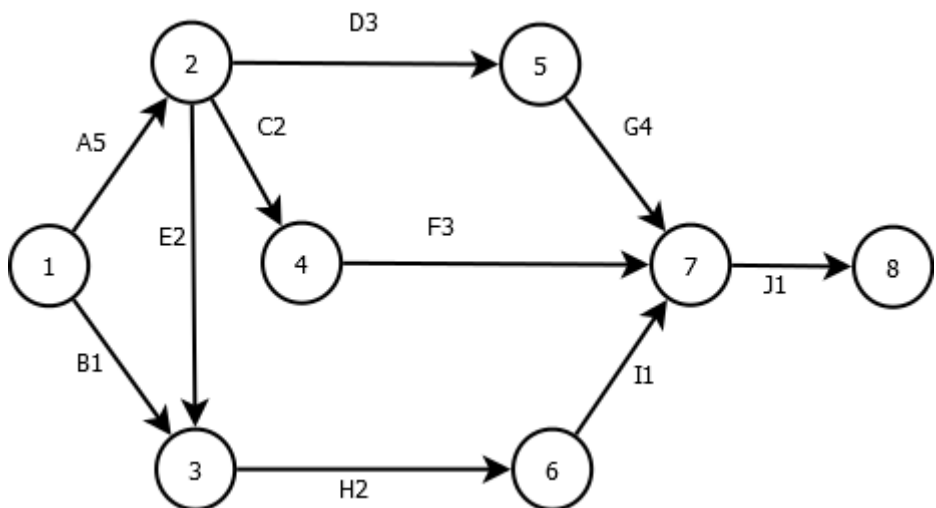
Χρόνος	Άφιξη πελάτη ή πελατών	Διάρκεια μέχρι την επόμενη άφιξη	Ταμίας 1	Ολοκλήρωση εξυπηρέτησης και διάρκεια παραμονής στο σύστημα
0	Πελάτης 1	2	Πελάτης 1	
1			Πελάτης 1	
2	Πελάτης 2	2	Πελάτης 1	
3			Πελάτης 1	
4	Πελάτης 3	2	Πελάτης 1	
5			Πελάτης 1	Πελάτης 1 → 6 λεπτά
6	Πελάτες 4 και 5	0,...	Πελάτης 2	Πελάτης 2 → 5 λεπτά
7			Πελάτης 3	
8			Πελάτης 3	
9			Πελάτης 3	
10			Πελάτης 3	Πελάτης 3 → 7 λεπτά
11			Πελάτης 4	
12			Πελάτης 4	
13			Πελάτης 4	
14			Πελάτης 4	Πελάτης 4 → 9 λεπτά
15			Πελάτης 5	
16			Πελάτης 5	
17			Πελάτης 5	
18			Πελάτης 5	Πελάτης 5 → 13 λεπτά

Μέση παραμονή πελατών στο σύστημα=  $(6+5+7+9+13)/5 = 8$

### ΣΤ. Εύρεση κρίσιμου μονοπατιού σε ένα δίκτυο δραστηριοτήτων

Δίνεται το ακόλουθο δίκτυο δραστηριοτήτων στο οποίο φαίνεται για κάθε δραστηριότητα οι δραστηριότητες που θα πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί πριν την εκκίνησή της. Επίσης για κάθε δραστηριότητα δίνεται μια περιγραφή και η διάρκειά της σε μήνες.

Δραστηριότητα	Περιγραφή	Προαπαιτούμενες δραστηριότητες	Διάρκεια
A	Σχεδίαση προϊόντος		5
B	Έρευνα αγοράς		1
C	Ανάλυση παραγωγής	A	2
D	Μοντέλο παραγωγής	A	3
E	Διαφημιστικό φυλλάδιο	A	2
F	Ανάλυση κόστους	C	3
G	Έλεγχος προϊόντος	D	4
H	Εκπαίδευση πωλητών	B, E	2
I	Τιμολογιακή πολιτική	H	1
J	Αναφορά έργου	F, G, I	1



Να υπολογιστούν οι νωρίτεροι χρόνοι γεγονότων, οι αργότεροι χρόνοι γεγονότων, το ελεύθερο περιθώριο κάθε γεγονότος, το ελεύθερο περιθώριο κάθε δραστηριότητας και το κρίσιμο μονοπάτι.

Νωρίτεροι χρόνοι γεγονότων

$$ET(1) = 0$$

$$ET(2) = 5$$

$$ET(3) = \max(ET(1)+1, ET(2)+2) = \max(1, 7) = 7$$

$$ET(4) = ET(2) + 2 = 5 + 2 = 7$$

$$ET(5) = ET(2) + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$ET(6) = ET(3) + 2 = 7 + 2 = 9$$

$$ET(7) = \max(ET(5) + 4, ET(4) + 3, ET(6) + 1) = \max(8+4, 7+3, 9+1)=12$$

$$ET(8) = ET(7) + 1 = 12 + 1 = 13$$

Αργότεροι χρόνοι γεγονότων

$$LT(8) = 13$$

$$LT(7) = 13 - 1 = 12$$

## Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Ελεγκτικής

$$LT(6) = LT(7) - 1 = 11$$

$$LT(5) = LT(7) - 4 = 8$$

$$LT(4) = LT(7) - 3 = 9$$

$$LT(3) = LT(6) - 2 = 9$$

$$LT(2) = \min(LT(3)-2, LT(4)-2, LT(5)-3) = \min(9-2, 9-2, 8-3) = 5$$

$$LT(1) = \min(LT(2)-5, LT(3)-1) = \min(5-5, 9-1) = 0$$

Ελεύθερο περιθώριο γεγονότων (αντιπροσωπεύει το χρονικό διάστημα που μπορεί να μετακινηθεί προς τα εμπρός στον χρόνο το γεγονός και να μην προκληθεί καθυστέρηση στην χρονική ολοκλήρωση του έργου)

$$SN(1) = LT(1) - ET(1) = 0 - 0 = 0$$

$$SN(2) = LT(2) - ET(2) = 5 - 5 = 0$$

$$SN(3) = LT(3) - ET(3) = 9 - 7 = 2$$

$$SN(4) = LT(4) - ET(4) = 9 - 7 = 2$$

$$SN(5) = LT(5) - ET(5) = 8 - 8 = 0$$

$$SN(6) = LT(6) - ET(6) = 11 - 6 = 5$$

$$SN(7) = LT(7) - ET(7) = 12 - 12 = 0$$

$$SN(8) = LT(8) - ET(8) = 13 - 13 = 0$$

Ελεύθερο περιθώριο δραστηριοτήτων (αντιπροσωπεύει το χρονικό διάστημα που μπορεί να καθυστερήσει η δραστηριότητα και να μην προκληθεί καθυστέρηση στην συνολική ολοκλήρωση του έργου)

$$SA(A) = LT(2) - ET(1) - 5 = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$SA(B) = LT(3) - ET(2) - 1 = 9 - 5 - 1 = 3$$

$$SA(C) = LT(4) - ET(2) - 2 = 9 - 5 - 2 = 2$$

$$SA(D) = LT(5) - ET(2) - 3 = 8 - 5 - 3 = 0$$

$$SA(E) = LT(3) - ET(2) - 2 = 9 - 5 - 2 = 2$$

$$SA(F) = LT(7) - ET(4) - 3 = 12 - 7 - 3 = 2$$

$$SA(G) = LT(7) - ET(5) - 4 = 12 - 8 - 4 = 0$$

$$SA(H) = LT(6) - ET(3) - 2 = 11 - 7 - 2 = 2$$

$$SA(I) = LT(7) - ET(6) - 1 = 12 - 9 - 1 = 2$$

$$SA(J) = LT(8) - ET(7) - 1 = 13 - 12 - 1 = 0$$

Το κρίσιμο μονοπάτι ενώνει κόμβους με περιθώριο γεγονότος μηδέν μέσω ακμών με περιθώριο δραστηριότητας 0.

Πηγή: <http://hadm.sph.sc.edu/courses/j716/cpm/cpm.html>