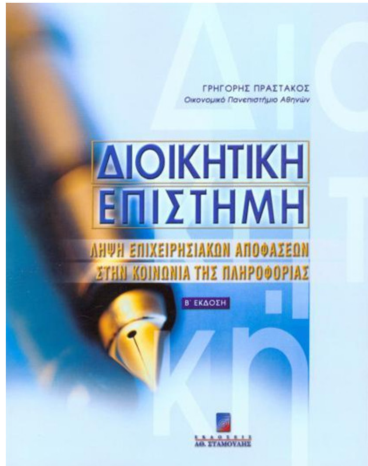


Πληροφοριακά Συστήματα Διοίκησης

Εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό

Τι είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός;

- Είναι το σημαντικότερο μοντέλο στη Λήψη Αποφάσεων
- Αντικείμενό του η «άριστη» κατανομή περιορισμένων πόρων (**scarce resources**) μεταξύ «ανταγωνιστικών» δραστηριοτήτων.
- Άριστος τρόπος ορίζεται εκείνος που βελτιστοποιεί το στόχο (αντικειμενική συνάρτηση):
  - Ελαχιστοποίηση κόστους
  - Μεγιστοποίηση κέρδους

Παραδείγματα προβλημάτων

- Κατανομή κρατικού προϋπολογισμού.
- Κατανομή πρώτων υλών, εργατικού δυναμικού και μηχανών μιας επιχείρησης:
  - Παραγωγή προϊόντων
  - Εξυπηρέτηση πελατών
- Κατανομή κεφαλαίου μεταξύ ανταγωνιστικών επενδυτικών ευκαιριών.

Παράδειγμα: Βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής

- Εξάντληση δυναμικότητας λόγω:
  - Διαθεσιμότητας πρώτων υλών
  - Δυναμικότητας παραγωγής μηχανών
  - Χωρητικότητα αποθηκών
  - Διαθεσιμότητα προσωπικού
  - Άλλοι τεχνολογικοί, κοινωνικοί ή περιβαλλοντικοί παράγοντες
- Συγκρουόμενες αποφάσεις
  - Παραγωγή αποκλειστικά προϊόντος με μεγαλύτερο κέρδος ανά μονάδα
  - Παραγωγή αποκλειστικά προϊόντος που καταλαμβάνει τον μικρότερο χώρο στις αποθήκες.
- Κίνδυνοι
  - Συρρίκνωση κέρδους
  - Χρήση κρίσιμης δυναμικότητας που θα ήταν αποδοτικότερη αν είχε χρησιμοποιηθεί αλλιώς.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα της δίαιτας

- Ζητείται να βρεθεί η σύνθεση της δίαιτας, η οποία:
  - ικανοποιεί τη συνταγή του γιατρού (περιορισμούς για βιταμίνες, πρωτεΐνες, υδατάνθρακες, κ.α.)
  - έχει το ελάχιστο κόστος
- Παρουσιάζει αντιστοιχία με προβλήματα άριστης σύνθεσης χαρτοφυλακίου
  - Περιορισμοί ρίσκου, απόδοσης
  - Καλύτερο οικονομικό αποτέλεσμα

Food Type	Carbo hydrates	Fat	Protein	Cost in dollars Per unit
A	10	20	15	2
B	25	10	20	4
Requirement	4000	500	300	

Παράδειγμα: Το πρόβλημα των μεταφορών

- Μεταβλητές απόφασης
  - Επιλογή προμηθευτών
  - Επιλογή μεταφορέων
  - Επιλογή διαδρομών
- Περιορισμοί
  - Δυνατές διαδρομές
  - Μεταφορικά μέσα (ιδιόκτητα ή ξένα)
  - Ιδιομορφίες κοστολόγησης
  - Σημεία διανομής
- Συνάρτηση κόστους
  - Ελαχιστοποίηση κόστους ή χρόνου

Παράδειγμα: Επενδύσεις

- Εναλλακτικά προγράμματα με διαφορετικές απαιτήσεις σε:
  - Επένδυση κεφαλαίου
  - Διάρκεια
  - Αποδόσεις
  - Κίνδυνο
  - Αβεβαιότητα αποδόσεων
- Πρόγραμμα που καθορίζει:
  - Το χρόνο ανάληψής τους
  - το ποσό επένδυσης

Μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού

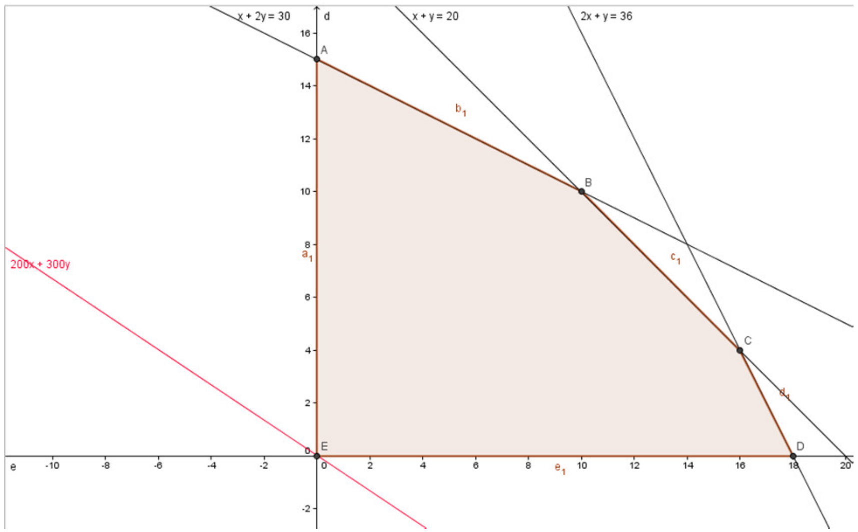
- Αποτελείται από:
  - Μεταβλητές απόφασης (π.χ. Γραμμές και ύψος παραγωγής / προϊόν, επενδύσεις / κατηγορία, κλπ).
  - Αντικειμενική συνάρτηση (π.χ. Κόστος, κέρδος, πωλήσεις, κλπ).
  - Περιορισμούς (π.χ. Δυναμικότητας, διαθεσιμότητας πρώτων υλών, τεχνολογίας, αγοράς, κλπ).
- Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι <u>γραμμικές συναρτήσεις</u>, ως προς τις άγνωστες μεταβλητές.
- Οι άγνωστες μεταβλητές είναι συνεχείς.
- Η λύση του προβλήματος ΓΠ αποτελεί πρόγραμμα δράσης προκειμένου να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος.

Πρόβλημα μεγιστοποίησης

- Έστω x, y οι άγνωστες ποσότητες των Π1, Π2
- Να βρεθούν (x, y) έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα:
  - $z = 200x + 300y$
- Περιορισμοί:
  - $x + 2y \leq 30$
  - $x + y \leq 20$
  - $2x + y \leq 36$
  - $x \geq 0, y \geq 0$

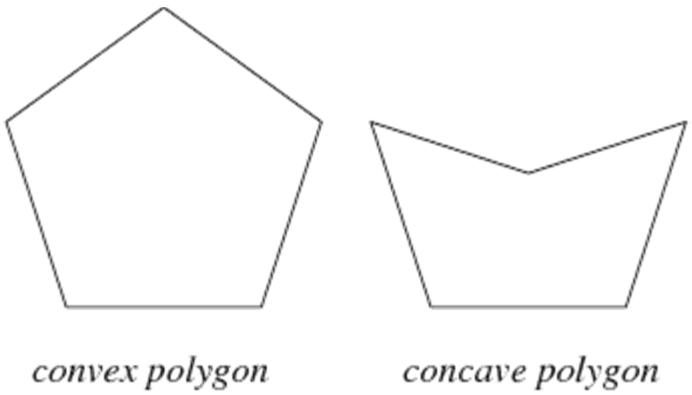
Πρώτη ύλη	Προϊόντα		Αποθέματα
	Π1	Π2	
Α	1	2	30
Β	1	1	20
Γ	2	1	36

Επιτρεπτή περιοχή



- Η επιτρεπτή περιοχή (feasible region) είναι το πολύγωνο (A-B-C-D-E) που σχηματίζεται από την τομή όλων των περιορισμών
- Το σημείο x,y που θα επιλεγεί θα πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου (A-B-C-D-E)
- Η επιτρεπτή περιοχή έχει τόσες ακμές όσες και περιορισμούς
- Αν ένας περιορισμός δεν αντιστοιχεί σε ακμή στην επιτρεπτή περιοχή τότε είναι περιττός (**redundant**) και μπορεί να απορριφθεί από το πρόβλημα
  - π.χ. x+y <= 40
- Αν οι περιορισμοί δεν έχουν κοινό σημείο το πρόβλημα ονομάζεται αδύνατο (**infeasible**)
  - π.χ. x+y >= 40

Κυρτότητα (convexity)

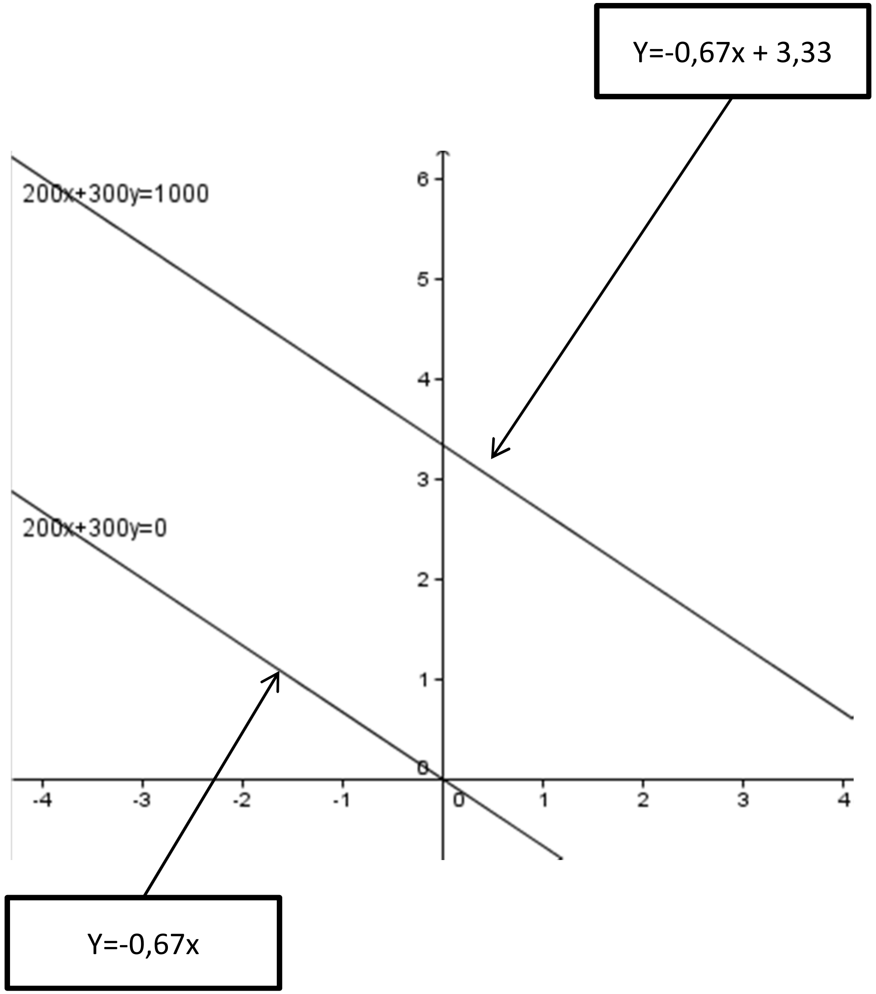


Σε προβλήματα με περισσότερες από 2 μεταβλητές η εφικτή περιοχή είναι ένα κυρτό πολύτοπο.

- Κυρτότητα επιτρεπτής περιοχής: Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει 2 οποιαδήποτε σημεία της επιτρεπτής περιοχής ισχύει ότι όλα τα σημεία του ανήκουν στην επιτρεπτή περιοχή.

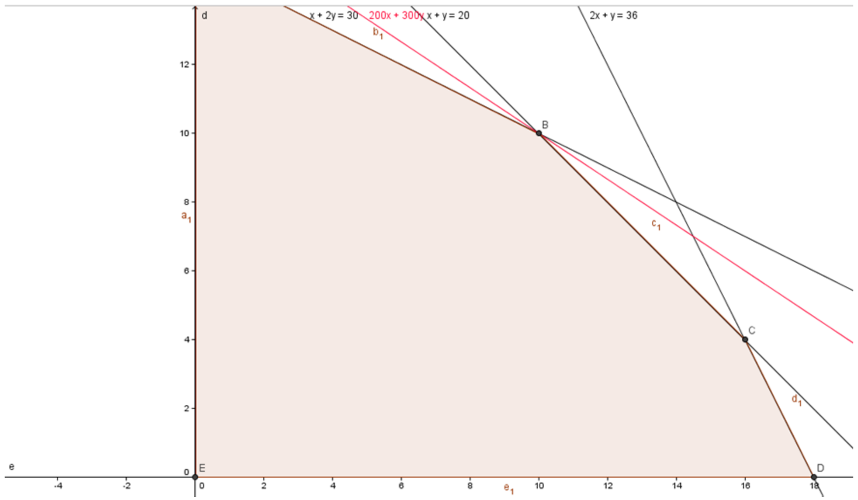
Αντικειμενική συνάρτηση

- Η αντικειμενική συνάρτηση αναπαριστά μια οικογένεια συναρτήσεων όλα τα μέλη της οποίας έχουν την ίδια κλίση



Εύρεση της λύσης

- Μετατοπίζοντας την συνάρτηση κόστους προς τα έξω από την αρχή των αξόνων η τιμή της αυξάνεται
- Η γωνία Β είναι το σημείο της επιτρεπτής περιοχής με την μεγαλύτερη δυνατή τιμή για την συνάρτηση κόστους και αποτελεί την βέλτιστη λύση του προβλήματος



Το σημείο Β προσδιορίζεται με λύση του συστήματος 2 εξισώσεων:

$$x+2y=30$$
$$x+y=20$$

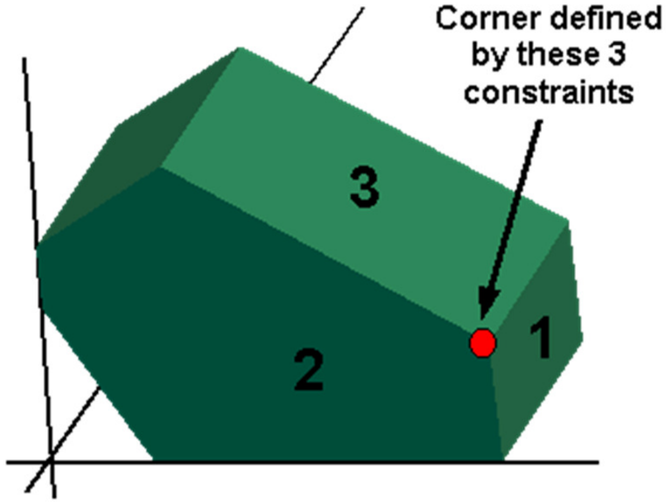
Η λύση είναι x=10 και y=10

Η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους είναι:

$$200x+300y = 5000$$

Ιδιότητες της λύσης

- Η βέλτιστη λύση ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι πάντα μια από τις γωνίες του κυρτού πολυτόπου το οποίο ορίζεται από τους περιορισμούς του προβλήματος
- Αν η κλίση της συνάρτησης κόστους είναι ίση με την κλίση ενός περιορισμού τότε η βέλτιστη λύση είναι οποιοδήποτε σημείο επί της ακμής αυτού του περιορισμού



Διατύπωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

- Η ποιότητα της απόφασης εξαρτάται από την ακρίβεια διατύπωσης του προβλήματος.
- Τα επιμέρους βήματα είναι:
  1. Κατανόηση του προβλήματος και ορισμός μεταβλητών.
  2. Ορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης.
  3. Ορισμός των περιορισμών.
  4. Εξέταση των προϋποθέσεων του ΓΠ.
- Η διατύπωση ενός προβλήματος ΓΠ δεν είναι μοναδική
- Η επιτυχία της διατύπωσης εξαρτάται από την εμπειρία του αναλυτή

Κατανόηση προβλήματος και ορισμός μεταβλητών

- Ποια είναι τα εναλλακτικά σχέδια δράσης;
- Ποια είναι τα χρήσιμα δεδομένα που αφορούν το πρόβλημα
  - εντοπισμός αντιφάσεων στα δεδομένα
- Ποιες είναι οι μεταβλητές του προβλήματος;

Ορισμός αντικειμενικής συνάρτησης

- Το μοντέλο ΓΠ απαιτεί μία μοναδική συνάρτηση.
- Πολλές φορές όμως μπορεί να διατυπωθούν περισσότεροι από έναν στόχοι.
- Παράδειγμα παραγωγής :
  - Μέτοχοι : Μέγιστο κέρδος
  - Πωλήσεις : Μέγιστες πωλήσεις
  - Παραγωγή: Καλύτερη απασχόληση εργατικού δυναμικού
- Σε περιπτώσεις με πολλούς στόχους πρέπει:
  - Να εκφραστούν οι επιμέρους στόχοι με ξεχωριστή βαρύτητα ο καθένας και να υπολογιστεί το άθροισμα των γινομένων (στόχος x βάρος).
  - Να επιλεγεί ο ένας στόχος ως πρωταρχικός και να εκφραστούν οι άλλοι ως περιορισμοί.
  - Να χρησιμοποιηθεί μέθοδος goal programming (δηλαδή να οριστούν επιθυμητές τιμές για κάθε στόχο και να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των αποκλίσεων από αυτές).
  - Να χρησιμοποιήσει άλλη μέθοδο πολυκριτηριακής ανάλυσης.

Ορισμός περιορισμών

- Οι περιορισμοί πρέπει να διατυπωθούν με:
  - Ακρίβεια
  - Συντομία
  - Πληρότητα
- Παραδείγματα περιορισμών:
  - Διαθεσιμότητας (π.χ. πρώτη ύλη στις αποθήκες)
  - Νομικούς ή θεσμικούς (π.χ. επιτρεπτό ωράριο προσωπικού)

Εξέταση προϋποθέσεων

- Προϋποθέσεις ΓΠ
  - Γραμμικότητα
  - Διαιρετότητα
  - Βεβαιότητα
- Αν δεν ισχύουν μπορούμε να διατυπώσουμε και να λύσουμε μια προσέγγιση του προβλήματος στην οποία θα ισχύουν οι προϋποθέσεις

Γραμμικότητα

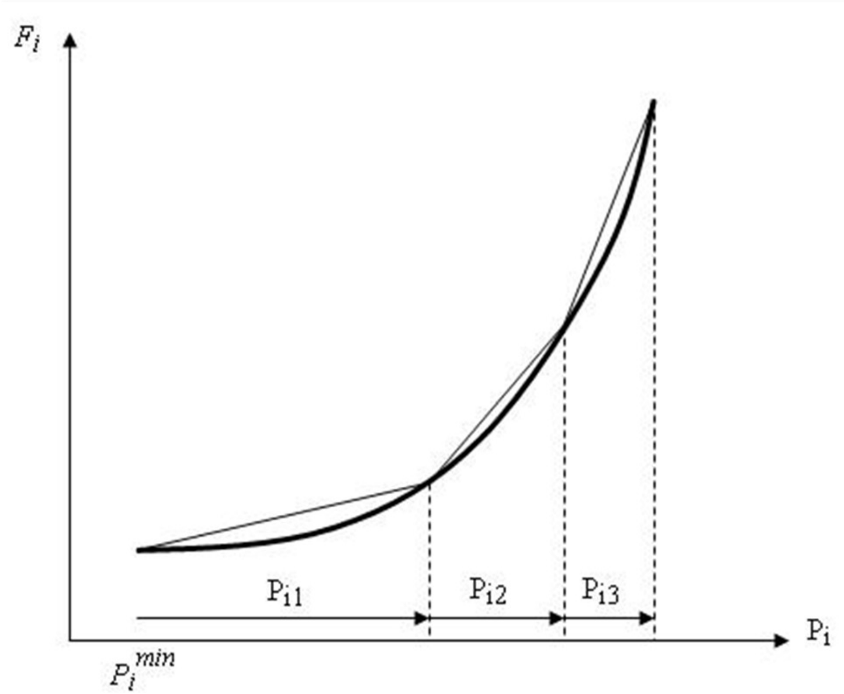
- Πρέπει οι συναρτήσεις του προβλήματος (αντικειμενική και περιορισμοί) να είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες μεταβλητές.
- Θα πρέπει να ισχύει η ιδιότητα της αναλογικότητας.

Ψ = 20 – 4x1 – 2x2

Τιμή της x_1	Τιμή της ψ	Μεταβολή της x_1	Μεταβολή της ψ
0	$20 - 2x_2$	-	-
1	$16 - 2x_2$	+1	-4
2	$12 - 2x_2$	+1	-4
3	$8 - 2x_2$	+1	-4
4	$4 - 2x_2$	+1	-4
5	$- 2x_2$	+1	-4

Γραμμικότητα: Ειδικές περιπτώσεις

- Στην πράξη μερικές σχέσεις είναι μη γραμμικές, παρουσιάζοντας οικονομίες κλίμακας ή σταθερά κόστη.
  - Παραγωγή μεγάλων ποσοτήτων προϊόντων: Μείωση κόστους λόγω ποσοτικών αγοραστικών εκπτώσεων στις πρώτες ύλες.
  - Κόστος ενοικίασης αυτοκινήτου: Σταθερό για κάποια χιλιόμετρα και αύξηση από εκεί και πέρα.
- Άλλες σχέσεις είναι τμηματικά γραμμικές (π.χ. αμοιβή ωρομισθίου):
  - για τις 8 πρώτες ώρες = Βασικός ωριαίος μισθός x αριθμός ωρών
  - για τις 2 πρώτες ώρες υπερωρίας = 150% x Βασικός ωριαίος μισθός x αριθμός ωρών
  - για τις μετέπειτα ώρες υπερωρίας = 200% x Βασικός ωριαίος μισθός x αριθμός ωρών



Σε πολλές περιπτώσεις που δεν ισχύει η γραμμικότητα μπορεί να γίνει αρκετά καλή προσέγγιση με γραμμικές συναρτήσεις που λύνουν το πρόβλημα.

Διαιρετότητα

- Κάθε δραστηριότητα (μεταβλητή) είναι συνεχής και, επομένως, άπειρα διαιρετή.
- Όλα τα επίπεδα δραστηριοτήτων και όλες οι χρήσεις πόρων επιτρέπεται να πάρουν κλασματικές τιμές ή ακέραιες τιμές.

- Η διαιρετότητα ισχύει:
  - Ώρες λειτουργίας μίας μηχανής
  - Λίτρα πετρελαίου που θα παραχθούν στο διυλιστήριο
- Η διαιρετότητα δεν ισχύει:
  - Αριθμός αντιτύπων ενός βιβλίου
  - Αριθμός υποκαταστημάτων μιας επιχείρησης

Αντιμετώπιση προβλημάτων διαιρετότητας

- Αν οι τιμές των μεταβλητών είναι σχετικά μεγάλες (πρακτικά πάνω από 15).
  - Μπορεί να αγνοηθεί η υπόθεση της διαιρετότητας και να λυθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα ΓΠ.
  - Οι τιμές θα στρογγυλοποιηθούν στην κοντινότερη ακέραια μονάδα.
- Αν οι τιμές των μεταβλητών είναι μικρές (π.χ. 0 ή 1 όπως σε πολλά προβλήματα επενδύσεων).
  - Πρέπει να χρησιμοποιηθούν τεχνικές Ακεραίου Προγραμματισμού.

Βεβαιότητα

- **Υπόθεση βεβαιότητας**: Όλες οι παράμετροι του προβλήματος είναι γνωστές με απόλυτη βεβαιότητα.
- Για παράδειγμα:
  - Διαθεσιμότητες πρώτων υλών.
  - Συνεισφορά κάθε δραστηριότητας στη αντικειμενική συνάρτηση.
  - Απαιτούμενη χρήση των πόρων για την επίτευξη των δραστηριοτήτων.
- Όταν η προϋπόθεση της βεβαιότητας δεν ισχύει, μπορούμε να βοηθηθούμε με την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης

Τυποποιημένη μορφή ενός μοντέλου ΓΠ

Να ευρεθούν τιμές $(x_1,\ x_2, \dots, x_n)$, για το ύψος των δραστηριοτήτων (1, 2, … n), ώστε να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots\ + c_nx_n$$

Με τους περιορισμούς:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1nxn} \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + am_2x_2 + \ \dots + amn_{xn} \leq bm \\
x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
\end{gathered}$$

- Λανθασμένη διατύπωση ενός προβλήματος ΓΠ οδηγεί σε αποτελέσματα χωρίς αξία. Για παράδειγμα:
  - X = 0
  - X >= 20

Διαφυγόντα κέρδη και δυϊκές τιμές

- Το διαφυγόν κέρδος μιας πρώτης ύλης, που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα παραγωγής, αντιπροσωπεύει την αξία των πρώτων υλών όταν ο παραγωγός τις χρησιμοποιεί κατά τον βέλτιστο τρόπο. Οι τιμές αυτές ονομάζονται δυϊκές τιμές.

Πρώτη ύλη	Προϊόντα		Αποθέματα
	Π1	Π2	
Α	1	2	30
Β	1	1	20
Γ	2	1	36

Maximize z=200x + 300y
Subject To
x + 2y ≤ 30 (περιορισμός πρώτης ύλης Α)
x + y ≤ 20 (περιορισμός πρώτης ύλης Β)
2x + y ≤ 36 (περιορισμός πρώτης ύλης Γ)
x ≥ 0, y ≥ 0

Optimal Solution
x=10, y=10, z=5000
Το διαφυγόν κέρδος για τον περιορισμό πρώτης ύλης Α είναι 150. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε μια μονάδα ακόμα από το υλικό Α τότε το κέρδος θα αυξηθεί κατά 150€