1. Κεφάλαιο: ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Σύνοψη

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται περιορισμένη αναφορά στην κλασική έννοια του συνόλου καθώς και στην άλγεβρα των συνόλων. Τα παραδείγματα εξυπηρετούν τους παρακάτω μαθησιακούς στόχους: την κατανόηση της σημασίας των συνόλων στη διαμόρφωση και τη διαχείριση δομών δεδομένων, τις κατηγοριοποιήσεις και τις ταξινομήσεις των στοιχείων αυτών, τη διαμόρφωση της λογικής και της αναγνώρισης προτύπων.

Στην πρώτη παράγραφο σκιαγραφείται με σύντομο τρόπο η εξέλιξη της θεωρίας από τον Cantor στη σύγχρονη θεωρία των ασαφών συνόλων. Στην εξέλιξη αυτή ιδιαίτερο ρόλο διαδραμάτισε ο εντοπισμός των παραδόξων και η αμφισβήτηση των θέσεων που διατυπώθηκαν αρχικά.

Στη δεύτερη, την τρίτη και την τέταρτη παράγραφο παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της άλγεβρας των συνόλων με την κλασική τους έννοια.

Βασικές σχέσεις μεταξύ των συνόλων αναφέρονται στην πέμπτη παράγραφο, ενώ οι τελευταίες δυο παράγραφοι αναφέρονται στα ασαφή σύνολα και την τοπολογία των ασαφών συνόλων. Αναπτύσσονται οι μέθοδοι εισαγωγής μέτρου με τις συναρτήσεις συμμετοχής και παρουσιάζονται παραδείγματα συνόλων με στοιχεία, τα οποία και διακρίνονται λόγω των ποιοτικών χαρακτηριστικών τους, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο η συνάρτηση συμμετοχής καθορίζει τον βαθμό συμμετοχής των στοιχείων στο ασαφές σύνολο.

Πέρα από τη χρήση της ως θεμελιώδους συστήματος, η θεωρία συνόλων απαρτίζει από μόνη της έναν κλάδο των μαθηματικών με ενεργή ερευνητική κοινότητα. Η σύγχρονη έρευνα στη συνολοθεωρία περιλαμβάνει μια ποικίλη συλλογή από θέματα, που φτάνουν από τη δομή της γραμμής των πραγματικών αριθμών έως τη μελέτη της συνέπειας για μεγάλους πληθάριθμους.

Προαπαιτούμενη Γνώση
Δεν απαιτείται.

1. Γενικά περί Συνόλων

Η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική. Ως πρωταρχική έννοια δεν είναι δυνατό να οριστεί μια θέση η οποία με σαφή τρόπο υποδείχτηκε από τον Bertrand Russell. Έτσι, η θεωρία στηρίζεται σε μια σειρά αξιωμάτων και γι' αυτό είναι μια αξιωματική θεωρία, όπως άλλωστε και άλλες θεωρίες (μαθηματική θεωρία μέτρου, τοπολογία, Θεωρία Πιθανοτήτων, κ.λπ.). Η σύγχρονη μελέτη των συνόλων ξεκίνησε από τον Georg Cantor και τον Dedekind τη δεκαετία του 1870. Στις αρχές του 20ού αιώνα, μετά τον εντοπισμό παραδόξων και αντιφάσεων στην αρχική, άτυπη θεωρία συνόλων, προτάθηκαν νέα συστήματα αξιωμάτων, το πιο γνωστό από τα οποία η «Zermelo–Fraenkel» θεωρία συνόλων με το αξίωμα επιλογής.

1.1. Τα Σύνολα υπό την Κλασική αυτών Έννοια

Ο Γκέοργκ Κάντορ (Georg Cantor) έθεσε τις βάσεις της Θεωρίας Συνόλων και τους υπεραριθμήσιμους αριθμούς. Σύμφωνα με τον Cantor, η Θεωρία Συνόλων ή συνολοθεωρία είναι η θεωρία που μελετά τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με συναρτήσεις και σχέσεις (π.χ. ομάδες, τοπολογικοί χώροι). Αν και **κάθε είδος συλλογής αντικείμενων** μπορεί να **στοιχειοθετήσει την έννοια του συνόλου**, η Θεωρία Συνόλων αποφεύγει την αναφορά στη φύση των στοιχείων των συνόλων και τα αντιμετωπίζει με γενικευμένη προσέγγιση, δηλαδή με την καθαρά μαθηματική λογική.

Παρότι, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, δεν υπάρχει ορισμός του συνόλου, για τον Cantor ο ορισμός του συνόλου διατυπώνεται ως εξής:

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά διά της εμπειρίας μας ή της διανόησής μας, είναι καλώς ορισμένα και διακρίνονται ευκρινώς μεταξύ τους.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται «**στοιχεία** ή **μέλη**» του συνόλου.

Ο Cantor κάνοντας χρήση της έννοιας της **ισχύος** (ή **πληθικού αριθμού**), που είχε προηγουμένως ορίσει ο Gottlob Frege, περιγράφει το σύνολο A ως συλλογή στοιχείων που δημιουργούν την κλάση όλων των ℵ(A) συνόλων με A~ℵ(A). Η έννοια του πληθάριθμου αναφέρεται μόνο σε πεπερασμένα σύνολα.

Ορισμός 1.1.1

Ισχύς του συνόλου A ή και **πληθικός αριθμός** αυτού είναι ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων που περιέχει το A. Συμβολίζεται με **ℵ(A)** ή και με |**A**|.

Στη βιβλιογραφία συναντάται και η χρήση του P αντί του εβραϊκού γράμματος ℵ. Ο συμβολισμός όμως της ισχύος του συνόλου A με το P(A) δημιουργεί σύγχυση, γιατί χρησιμοποιείται ακριβώς ο ίδιος για να εκφράσει το μέτρο πιθανότητας στην αξιωματική θεωρία των Πιθανοτήτων. Τέλος, αναφέρεται και ο πολύ συνηθισμένος συμβολισμός card(.) (από το cardinality).

Είναι σαφές ότι η πρωταρχική έννοια του συνόλου γίνεται αντιληπτή από τον άνθρωπο με τα ποιοτικά της χαρακτηριστικά. Για να δημιουργηθεί μια μαθηματική θεωρία, είναι απαραίτητο να οριστούν τα ποσοτικά χαρακτηριστικά των οντοτήτων που θα αποτελέσουν το αντικείμενό της. Η ισχύς του συνόλου εκφράζει ακριβώς αυτό: ένα μετρήσιμο μέγεθος, ικανό να θέσει ερωτήματα που αφορούν τη σύγκριση συνόλων ή τη σύνθεση συνόλων για να δημιουργηθούν νέα σύνολα. Στην κατεύθυνση αυτή εργαζόμενος, ο Cantor ανήγγειλε το θεώρημα συγκρισιμότητας πληθαρίθμων το 1895. Το 1899, σκιαγράφησε μια κάπως προβληματική απόδειξη. Πρόθεση του Cantor ήταν να επεκτείνει τις έρευνές του με τους πληθάριθμους στα άπειρα σύνολα, την έννοια του φυσικού αριθμού ως μέτρου του πλήθους των στοιχείων τους.

Ένα σύνολο είναι «καλώς ορισμένο» όταν τα στοιχεία του μπορούν να γίνονται απολύτως αντιληπτά. Για παράδειγμα, η αναφορά στο σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών δεν περιγράφει σύνολο, σύμφωνα με τον Cantor, διότι δεν υπάρχει σαφής τρόπος, που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσει κάποιος τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 10^6, τότε αυτοί αποτελούν καλώς ορισμένο σύνολο. Ο Zadech το 1965 θεμελίωσε μια νέα περιοχή στη μαθηματική επιστήμη αναφερόμενος στα ασαφώς ορισμένα σύνολα. Για τη θεωρία των ασαφών συνόλων θα αναφέρουμε στοιχεία στο τέλος του κεφαλαίου αυτού.

Η Θεωρία Συνόλων, που τυποποιείται με χρήση της λογικής πρώτου βαθμού, είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα για τα μαθηματικά. Η γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων χρησιμοποιείται στους ορισμούς σχεδόν όλων των μαθηματικών αντικειμένων, όπως οι συναρτήσεις, και έννοιες της Συνολοθεωρίας εντοπίζονται σε όλα τα διδακτέα προγράμματα μαθηματικών. Ο λόγος της προσοχής που αποδίδεται από τη μαθηματική επιστήμη στη Συνολοθεωρία είναι ακριβώς αυτή: συνδέει με άμεσο τρόπο τη διαισθητική αντίληψη του ανθρώπου για το περιβάλλον του με την καθαρά λογική διαδικασία. Στοιχειώδη δεδομένα για τα σύνολα και την ιδιότητα στοιχείου-μέλους συνόλου μπορούν να εισαχθούν στο δημοτικό σχολείο, με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn, για τη μελέτη συλλογών από κοινά φυσικά αντικείμενα. Ο Venn με τα διαγράμματά του πέτυχε ακριβώς αυτό: να καταστήσει αντιληπτή δια των αισθήσεων (όρασης) τον τρόπο διαχείρισης των συνόλων δια της Αλγεβρας των Συνόλων. Βασικές πράξεις όπως η ένωση και η τομή συνόλων μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια των διαγραμμάτων. Όπως προαναφέρθηκε, προχωρημένες έννοιες, όπως η ισχύς (ή πληθικός αριθμός) συνόλου, συνέδεσαν τα σύνολα με τη θεωρία μέτρου συνόλων. Η Θεωρία Συνόλων από τα τέλη του 19ου αιώνα μέχρι τις αρχές του 20ού, βασιζόμενη στις εικασίες του Cantor, προσέγγισε έστω και με αυτή τη μορφή (της εικασίας) τη λύση προβλημάτων σύγκρισης της ισχύος (ή πληθικότητας) άπειρων συνόλων, ενώ είχε σημαντικές εφαρμογές στην ανάλυση και τη μελέτη των αριθμητικών πράξεων (πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, ύψωσης σε δύναμη) για απειροσύνολα.

Ανάμεσα σε σημαντικά αποτελέσματα της μαθηματικής σκέψης του Cantor είναι και η απόδειξη ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων. Επίσης, ανάμεσα στα σημαντικά θεωρήματά του συμπεριλαμβάνεται και το ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)\subset\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην ιστορία των μαθηματικών ως η «διαγώνιος μέθοδος του Cantor». Η αναγνώριση του έργου του είναι ευρύτατη. Ήδη, από το 1900, ο Hilbert υποστήριζε ότι «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας». Μέχρι τότε, δύο ήταν τα βασικά προβλήματα σχετικά με την έννοια της ισοπληθικότητας, τα οποία δεν είχαν απαντηθεί. Τα προβλήματα αυτά, που αποτέλεσαν το αντικείμενο της έρευνας στην εξέλιξη της συνολοθεωρίας, είναι η εικασία συγκρισιμότητας της ισχύος δυο συνόλων. Για όλα τα σύνολα A, B, είτε ℵ(A)≤ℵ(B) ή .ℵD(A)≤ℵ(A).

Η υπόθεση του συνεχούς (Continuum Hypothesis), σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών X με πλήθος ενδιάμεσο αυτών του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{R}$.

Οι δύο εικασίες μαζί συνεπάγονται ότι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ εκπροσωπούν τις δύο ελάχιστες «τάξεις απείρου».

Η Θεωρία Συνόλων από τα τέλη του 19ου αιώνα μέχρι τις αρχές του 20ού, βασιζόμενη στη διαισθητική προσέγγιση του Cantor, πλησίαζε έστω και με τη μορφή εικασίας στη λύση προβλημάτων σύγκρισης της ισχύος άπειρων συνόλων, ενώ είχε σημαντικές εφαρμογές στην ανάλυση και στη μελέτη των αριθμητικών πράξεων (πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, δύναμης) για άπειρα σώματα.

Την ίδια σχεδόν εποχή (1902) ο sir Bertrand Russell αμφισβητεί τη βασική αρχή της Θεωρίας Συνόλων, που μέχρι τότε στηρίζονταν στην έννοια του συνόλου κατά Cantor, ότι δηλαδή σύνολο A είναι η συλλογή όλων των στοιχείων x τα οποία ορίζουν τόσα υποσύνολα όσος και ο πληθάριθμος του $A=\{x/P(x)\}$. Ο Russell παρατήρησε ότι από τη γενική αρχή εγκλεισμού του Cantor προκύπτει ότι το σύνολο όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο, αφού ως σύνολο θα έπρεπε να περιέχεται στον εαυτό του. Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η σκέψη αυτή θεωρήστε το σύνολο V όλων των συνόλων $V=\{x/\text{το } x \text{ είναι σύνολο}\}$ τότε $V\in V$. Όπως όμως είναι γνωστό, τα σύνολα με την κλασική τους έννοια, δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Αν δηλαδή $R=\{x/ \text{ το } x \text{ είναι σύνολο και το } x\notin x\}$. Τότε όμως, προκύπτει η αντίφαση $R\in R(\Leftrightarrow)R\notin R$. Η παρατήρηση αυτή ονομάστηκε ως παράδοξο του Russell. Η θεμελιώδης φύση του παραδόξου του Russell έκανε πολλούς μαθηματικούς να αναθεωρήσουν τη Θεωρία Συνόλων στο σύνολό της, δημιουργώντας έτσι το κατάλληλο έδαφος για να αναθεωρηθεί εκ βάθρων η αντίληψη των μαθηματικών για τη θεωρία αυτή. Δεν θα ήταν υπερβολή αν έλεγε κανείς ότι η κρίση αυτή χρειάστηκε σχεδόν τριάντα έτη για να αντιμετωπιστεί. Τα προβλήματα αυτά, καθώς και διάφορα άλλα προβλήματα αντιφατικότητας αντιμετωπίστηκαν με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων. Κατασκευάστηκαν, δηλαδή συστήματα από «θεμελιώδεις» ιδιότητες, οι οποίες καλούνται «αξιώματα», την αλήθεια των οποίων δεχόμαστε άνευ αποδείξεως. Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων, για να είναι αποδεκτό, πρέπει να έχει τα εξής γνωρίσματα:

- να είναι πλήρες,
- να είναι ανεξάρτητο και
- να είναι ελεύθερο αντιφάσεων.

Ο Zermelo πρότεινε το 1908 μια πρώτη αντιμετώπιση του προβλήματος. Ξεκινώντας από την παραδοχή ότι σύμφωνα με το περίφημο πλέον παράδοξο του Russell η γενική αρχή εγκλεισμού του Cantor είναι λανθασμένη (παράδοξο του Russell), παρατήρησε ότι η χρησιμότητά της στην απόδειξη βασικών θεωρημάτων της Συνολοθεωρίας ήταν ελάχιστη. Διαφώνησε με αυτούς που απαξίωναν ολόκληρη τη Θεωρία Συνόλων και, ξεκινώντας από τα τότε άκρα της προχωρώντας προς τα πίσω, προσπάθησε να προσδιορίσει τα αξιώματα, που είναι απαραίτητα για την εδραίωση της. Ως πρότυπο για την αξιωματική θεμελίωση του Zermelo χρησιμοποιήθηκε η αξιωματική ευκλείδεια γεωμετρία. Η αξιωματική βάση της θεωρίας στηρίζεται σε ένα μείγμα W αντικειμένων τα οποία είναι σύνολα ή άτομα μαζί με σχέσεις-συνθήκες. Με τον τρόπο αυτό ο Zermelo αντικατέστησε τις εικασίες του Cantor με επτά αξιώματα.

1.1.1. Αξίωμα της Επεκτασιμότητας

Αν A, B σύνολα για τα οποία ισχύει ότι $A=B\Leftrightarrow\forall x/x\in A\Leftrightarrow x\in B$.

Σχόλιο: Ισχύει λοιπόν ότι $\{\alpha,\beta\}=\{\beta,\alpha\}$. Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα A και, B ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε αμφότερες τις σχέσεις $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$.

1.1.2. Αξίωμα του Κενού Συνόλου και Ζεύγους

Υπάρχει ένα σύνολο Ø που δεν έχει κανένα περιεχόμενο στοιχείο, και καλείται κενό σύνολο. Εξ ορισμού, το κενό σύνολο περιέχεται (ανήκει) σε κάθε σύνολο. Για κάθε $x,y\in A=\{x,y\}$ με μόνα μέλη τα x,y τέτοια ώστε $t\in A\Leftrightarrow t=x$ ή $t=y$.

1.1.3. Αξίωμα της Εξειδίκευσης ή του Διαχωρισμού

$\forall$ σύνολο A και κάθε οριστική συνθήκη P (μονομελής) υπάρχει σύνολο B τέτοιο ώστε $x\in B \Leftrightarrow [x\in A$ και $\aleph(x)]$ δηλαδή $B=\{x\in A/\aleph(x)\}$. Αποτελεί περιορισμό της γενικής αρχής εγλεισμού του Cantor με αποτέλεσμα το σύνολο όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο.

1.1.4. Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου

Για ένα σύνολο A≡ ένα σύνολο B με μόνα μέλη όλα τα υποσύνολα του A. Αν $x\in B\Leftrightarrow$ το x είναι σύνολο, και $x\subseteq A$, $(\forall t)$ $[t\in x \Longrightarrow t\in A]$ το $B=\mathfrak{D}(A)$ ≡ δυναμοσύνολο του A. Το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A είναι σύνολο και καλείται «**δυναμοσύνολο του συνόλου A**».

1.1.5. Αξίωμα της Ένωσης

Για κάθε αντικείμενο $\mathcal{E}$ υπάρχει σύνολο B με μέλη τα μέλη των μελών του $\mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $t\in B \Longrightarrow (\exists x\in\mathcal{E})\ [t\in x]$. $B=\cup\mathcal{E}\equiv$ ένωση του $E=\{t/(\exists x\in\mathcal{E})[t\in x]\}$. $A\cup B=\cup\{A,B\}$.

1.1.6. Αξίωμα του Απείρου

Υπάρχει σύνολο I που περιέχει το Ø και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή: $\emptyset\in I$ και $(\forall x)$ $[x\in I \Longrightarrow \{x\}\in I]$, τότε το I είναι άπειρο, διότι: $\emptyset\in I$ και $\{\emptyset\}\in I$ $\{\{\emptyset\}\}\in I$. Τέλος, η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από το αξίωμα επιλογής.

1.1.7. Αξίωμα Επιλογής

Για κάθε διμελή σχέση $P\subseteq(A\times B)$ σε σύνολα A, B, ισχύει $(\forall x\in A)(\exists\psi\in B)[xP\psi] \Longrightarrow (\exists f{:}A\ B)(\forall x\in A(xPf(x)))$.

Δηλαδή, το αξίωμα αυτό λέει ότι το καρτεσιανό γινόμενο μιας συλλογής μη κενών συνόλων είναι μη κένο. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρει ότι για κάθε παράγοντα-σύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ μη κενών συνόλων υπάρχει μια οικογένεια x_i στοιχείων, τέτοια ώστε $x_i\in A_i, \forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Το αξίωμα επιλογής έχει στη Θεωρία Συνόλων τη θέση που έχει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία το περίφημο αίτημα των παραλλήλων. Όταν οικοδομούμε τα μαθηματικά επάνω σε μία αξιωματική θεωρία συνόλων, έχουμε δύο δυνατότητες: μαθηματικά με το αξίωμα επιλογής, και μαθηματικά χωρίς αυτό. Ακριβώς όπως έχουμε Ευκλείδεια και μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Το αξίωμα του Zermelo είναι θεμελιώδες, γιατί είναι το μόνο που στηρίζει λογικά τη δυνατότητα μετάβασης με καλά διαταγμένη πορεία από το αριθμήσιμο στο μη αριθμήσιμο. Μαζί δε με το αξίωμα της έκτασης είναι τα μόνα που δεν αποτελούν ειδική περίπτωση της Γενικής Αρχής Εγκλεισμού.

Το έβδομο αξίωμα του Zermelo ήταν και το πλέον αμφισβητούμενο από τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης. Για να γίνει αντιληπτή η χρησιμότητά του, θα πρέπει να αναφερθεί κανείς στο κλασικό παράδειγμα του Russell, όπου το A είναι ένα σύνολο ζευγών υποδημάτων, $P(A)=\cup A$ και $xP\psi\Leftrightarrow\psi\in x$. Η συνάρτηση $f(x)$={το αριστερό παπούτσι του x}, $(x\in A)$, προφανώς επιλέγει ακριβώς ένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι, συμβολικά $(\forall x\in A)\{xPf(x)\}$. Αν όμως το A είναι σύνολο από ζευγάρια κάλτσες, τότε δεν μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση: $A\rightarrow\cup A$ που διαλέγει ακριβώς μία κάλτσα $f(x)\in x$ από κάθε ζευγάρι, επειδή ένα ζευγάρι κάλτσες αποτελείται από δύο τελείως όμοια αντικείμενα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση επιλογής f υπάρχει αν το A είναι πεπερασμένο, με επαγωγή στον αριθμό μελών του A.

1.1.8. Καρτεσιανό Γινόμενο

Ο Rene Descartes ή Καρτέσιος, όπως είναι γνωστός στην Ελλάδα, για πρώτη ίσως φορά, αντιστοίχισε ένα προς ένα τα σημεία του χώρου ακεραίας διάστασης με ένα σύνολο στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό, δηλαδή δίνοντας σε κάθε σημείο του n-διάστατου χώρου ένα μοναδικό όνομα, άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας. Το σύνολο των ονομάτων του n-διάστατου χώρου, γνωστό ως Καρτεσιανό γινόμενο, θα οριστεί μετά από την παρουσίαση του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 1.1.1
Θεωρούμε τα σύνολα: Α=(α,β,γ,δ) και Β=(3,4,5). Κάθε στοιχείο του Α μπορεί να αντιστοιχηθεί με κάθε ένα στοιχείο του συνόλου Β. Έτσι δημιουργούνται 4×3 ζεύγη (x,y). Τα ζεύγη αυτά καλούνται **διατεταγμένα ζεύγη** επειδή έχει σημασία η διάταξη, δηλαδή η τοποθέτηση των στοιχείων σε αυτά. Για παράδειγμα, ένα από αυτά θα μπορούσε να είναι το (β,4). Αν ονομάσουμε το σύνολο αυτών των διατεταγμένων ζευγών με το σύμβολο Α×Β, τότε αυτό είναι ένα νέο σύνολο, με στοιχεία όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που προκύπτουν από το συνδυασμό των στοιχείων των συνόλων Α και Β. Το πρώτο στοιχείο κάθε ζεύγους προέρχεται πάντα από το πρώτο σύνολο και το δεύτερο από το δεύτερο. Στο παράδειγμα που εξετάζουμε έχουμε: $A\times B=\{(\alpha,\beta)\}\alpha:\alpha\in A$ και $\beta:\beta\in B\}$.

Με βάση τον ορισμό, το καρτεσιανό γινόμενο των Α και Β είναι: Α×Β={(α,3), (α,4), (α,5),(β,3), (β,4), (β,5), (γ,3), (γ,4), (γ,5), (δ,3), (δ,4), (δ,5)}.

Ορισμός 1.1.2
Το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων που ορίζονται από το σύνολο $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: $x_i\in A_i, i=1,2,\ldots v\}$ καλείται **καρτεσιανό γινόμενο** των $A_1,A_2,\ldots,A_\nu$. Το στοιχείο x_i είναι η i – συντεταγμένη της διατεταγμένης ν-άδας.

Θεώρημα 1.1.1 *Του Cantor*
Για κάθε σύνολο Α, ισχύει $A\subseteq\mathfrak{D}(A)$, όπου το $\mathfrak{D}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου Α.
Δηλαδή το Α έχει μικρότερο πληθικό αριθμό από το δυναμοσύνολο του Α.

Απόδειξη

Έχουμε μια συνάρτηση:
f:A→P(A), καθώς x→{x} που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο x του Α το μονοσύνολο x με ένα μόνο στοιχείο, το x. Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Καλά ορισμένη: $f(x)$ ανήκει στο P(A) $\{x\}\in A\rightarrow f(x)\in P(A)$.
- Είναι: 1-1.$\{x\}=\{y\}\Leftrightarrow x=y$ (Από το Αξίωμα επέκτασης) $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. (Όπως θα δούμε παρακάτω στο Zermelo).

Δια της εις άτοπον απαγωγής: Δεχόμαστε ότι υπάρχει $P:A\rightarrow\aleph(A)$. Έστω ότι η P είναι επιμορφισμός. Δηλαδή δείχνει ότι Α=P(A).

Ορίζουμε τώρα το στο σύνολο: $B=\{x\in A/x\notin f(x)\}$.
Αφού το Β είναι υποσύνολο του Α και υποθέσαμε ότι η P είναι επί, πρέπει να υπάρχει κάποιο b ανήκει στο Α ώστε B=P(b). Άρα b ανήκει στο B ή b δεν ανήκει στο B.
Αλλά b ανήκει στο B, οπότε συνεπάγεται ότι b ανήκει στο P(b), άρα το b δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού του B και επομένως b δεν ανήκει στο B. Άτοπο.
Στην αντίθετη περίπτωση, b δεν ανήκει στο B, συνεπάγεται b δεν ανήκει P(b).Οπότε το b δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ορισμού του B και άρα b ανήκει στο B. Άρα δεν υπάρχει ο επιμορφισμός π.

Ορισμός 1.1.3
Ένα σύνολο S λέγεται **αριθμήσιμο** ή μετρήσιμο αν είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη (1-1) απεικόνιση των στοιχείων του στους φυσικούς αριθμούς.

Θεώρημα 1.1.2 *Το Διαγώνιο Επιχείρημα του Cantor.*
Ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων, και ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)\subset R$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην ιστορία των μαθηματικών ως η «διαγώνιος μέθοδος του Cantor». Ονομάζεται και επιχείρημα της Διαγωνοποίησης και δημοσιεύτηκε το 1891 από τον Cantor. Το διαγώνιο Επιχείρημα είναι μια απόδειξη για τη μη μετρησιμότητα των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη

Ένα μη μετρήσιμο σύνολο:

Η προέλευση της απόδειξης του Cantor, θεωρεί μια άπειρη ακολουθία του τύπου $(x_1,x_2,x_3,...)$ όπου κάθε στοιχείο x_i είναι είτε 0 ή 1. Θεωρώντας μια λίστα από κάποιες από τις ακολουθίες, έχουμε:

$s_1=(0,0,0,0,0,0,0,...)$
$s_2=(1,1,1,1,1,1,1,...)$
$s_3=(0,1,0,1,0,1,0,...)$
$s_4=(1,0,1,0,1,0,1,...)$
$s_5=(1,1,0,1,0,1,1,...)$
$s_6=(0,0,1,1,0,1,1,...)$
$s_7=(1,0,0,0,1,0,0,...)$
...

Γενικά θα γράφεται: $s_n=(s_{n,1},s_{n,2},s_{n,3},s_{n,4},...)$.

Το οποίο λέει ότι το $s_{n,m}$ είναι το m στοιχείο της n ακολουθίας της λίστας.

Έτσι κατασκευάζουμε μια ακολουθία s_0 με στοιχεία των ακολουθιών της λίστας ως εξής: Το 1ο στοιχείο της s_0 είναι διαφορετικό από το 1ο στοιχείο της 1ης ακολουθίας στη λίστα.

Και γενικά το n στοιχείο της s_0 είναι διαφορετικό από το n στοιχείο της n ακολουθίας στη λίστα. Έτσι:

$s_1=(\mathbf{0},0,0,0,0,0,0,...)$
$s_2=(1,\mathbf{1},1,1,1,1,1,...)$
$s_3=(0,1,\mathbf{0},1,0,1,0,...)$
$s_4=(1,0,1,\mathbf{0},1,0,1,...)$
$s_5=(1,1,0,1,\mathbf{0},1,1,...)$
$s_6=(0,0,1,1,0,\mathbf{1},1,...)$
$s_7=(1,0,0,0,1,0,\mathbf{0},...)$
...

Και δημιουργείται η ακολουθία s_0: $s_0=(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},...)$.

Τα στοιχεία $s_{1,1},s_{2,2}$,… που είναι υπογραμμισμένα δείχνουν την προέλευση του ονόματος «Διαγώνιο Επιχείρημα».

Έστω $T=\{s_1,s_2,s_3,\dots,s_n,\dots\}$.

Η καινούργια ακολουθία s_0 είναι ξεχωριστή από τις άλλες ακολουθίες στη λίστα.Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο T περιέχεται από όλες τις άπειρες ακολουθίες του 0 και του 1.

Αυτές οι ακολουθίες δεν μπορούν να μπουν σε μια λίστα s_1, s_2,…

Το T περιέχει όλες τις ακολουθίες, άρα πρέπει να περιέχει και την s_0. Αλλά το s_0 δεν εμφανίζεται πουθενά στη λίστα, άρα το T δεν περιέχει το s_0.

Το T δεν μπορεί να τοποθετηθεί σε 1-1 αντιστοιχία με τους Φυσικούς αριθμούς. Άρα είναι μη αριθμήσιμο.

Πορίσαματα του Θεωρήματος της Διαγωνιοποίησης

Το σύνολο των Πραγματικών είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των Φυσικών αριθμών. Το σύνολο των Πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο. Το ανοικτό διάστημα (0,1) δεν είναι αριθμήσιμο. Τα Σύνολα των Φυσικών, των Ακεραίων και των Ρητών είναι αριθμήσιμα. Οι άπειρες ακολουθίες δεν είναι αριθμήσιμες. Αν τα A_1,..A_n είναι αριθμήσιμα τότε και το Καρτεσιανό Γινόμενο τους είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.1.3

Για κάθε ακολουθία $A_0,A_1,\dots$ αριθμήσιμων συνόλων, η ένωση $A=A_0\cup A_1\cup\dots$ είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο.

Παράδειγμα 1.1.2

Το σύνολο των Ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο γιατί γράφεται στη μορφή: $Q=\cup Z(1/n),\forall n\in Z$.

Ο Cantor απέδειξε ότι τα μέλη του συνόλου των ακεραίων και του συνόλου των κλασμάτων αντιστοιχίζονται ένα προς ένα χωρίς να περισσεύει κανένα.

Θετικοί Ρητοί Q+={1/1,1/2,2/1,1/3,2/2,3/1,1/4,…}.

Θετικοί Ρητοί Q+={1/1,1/1,1/2,2/1,2/2,1/3,3/1,2/3,3/2,3/3,1/4,4/4,…}.

Στην πρώτη ακολουθία, εμφανίζονται πρώτα τα κλάσματα με αριθμητή και παρανομαστή ίσο με 2, μετά τα κλάσματα με αριθμητή και παρανομαστή ίσο με 3 και έτσι συνεχίζουμε.
Ένα κλάσμα p/q θα εμφανιστεί όταν απαριθμούμε τα κλάσματα με αριθμητή και παρανομαστή ίσο με $p+q$.

Στη δεύτερη ακολουθία, κάθε κλάσμα p/q ακολουθείται από το αντίστροφο του q/p. Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα στις περιττές θέσεις, έχουν αριθμητή μικρότερο ή ίσο με τον παρανομαστή και ότι πρώτα είναι όλα τα κλάσματα με παρανομαστή 1 και μετά όλα τα κλάσματα με παρανομαστή 2, κτλ. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι αν τροποποιήσουμε τις παραπάνω ακολουθίες, τότε θα περιέχουν και τους αρνητικούς ρητούς.

Άρα το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο.

1.2. Πράξεις των Συνόλων

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

Οι πράξεις (θα τις συναντήσετε αργότερα και ως «διμελείς σχέσεις») στην Άλγεβρα των Συνόλων είναι δυο. Η ένωση και η τομή. Για δύο σύνολα A και B ορίζονται.

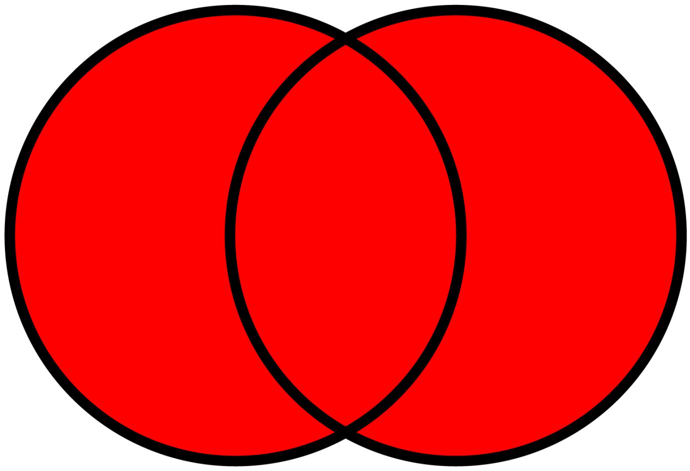
Ορισμός 1.2.1

Βασικό ή **Καθολικό** Σύνολο U (Universal Set) καλείται το σύνολο στο οποίο ανήκει ένα πλήθος υποσυνόλων τα οποία είναι παράγοντες στις πράξεις της άλγεβρας των συνόλων.

Έστω U={1,2,3,...,10} ένα **βασικό σύνολο** (Universal) και δύο υποσύνολά του: A={1,2,3,4} και B={3,4,5,6}.
Το σύνολο {1,2,3,4,5,6}, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των A και B, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του U που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα A και B λέγεται «ένωση των συνόλων» A και B.

Ορισμός 1.2.2

Η **Ένωση συνόλων** (∪):$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$. Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένα νέο σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A και του B.



A∪B

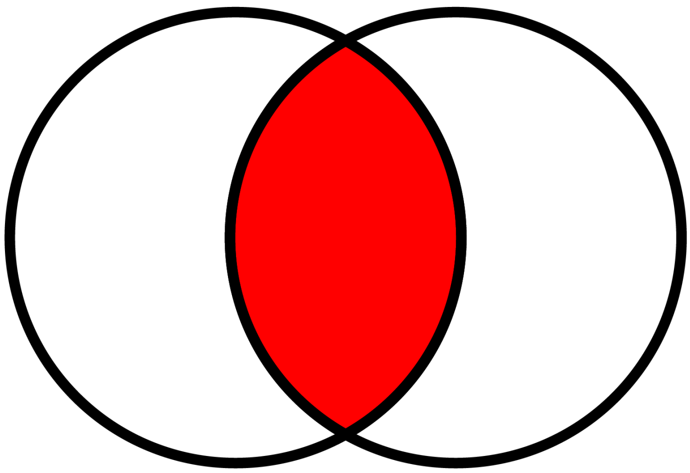
Σχήμα 1.2.1 *Αναπαράσταση Venn της πράξης της ένωσης δυο συνόλων.*

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου U λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με A∪B.

Το σύνολο {3,4} που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των A και B λέγεται τομή των A και B.

Ορισμός 1.2.3

Η **τομή συνόλων** (∩):$A \cap B=\{x|x \in A \wedge x \in B\}$. Η πράξη της τομής παράγει ένα σύνολο που περιέχει μόνο τα στοιχεία των δύο συνόλων που είναι κοινά σε αυτά.



A∩B

Σχήμα 1.2.2 *Αναπαράσταση Venn της πράξης της τομής δυο συνόλων.*

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με A∩B.

Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν A∩B=0, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα μεταξύ τους**.

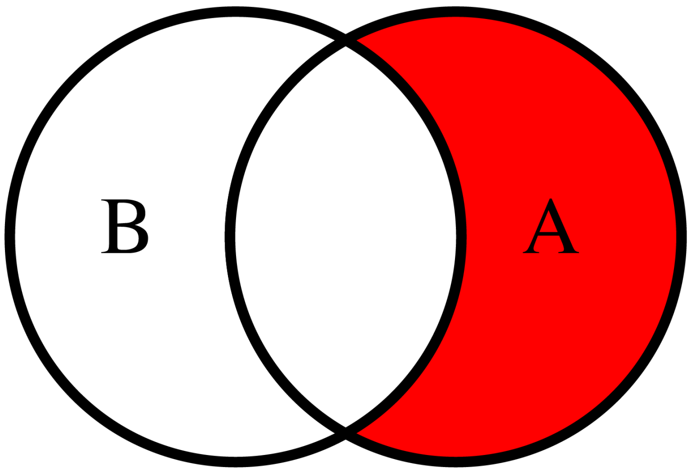
Το συμπλήρωμα συνόλου ($.^c$):$A^c=\{x|x \notin A\}$. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου A, είναι ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του καθολικού συνόλου του A που δεν ανήκουν στο A.

Το σύνολο {5,6,7,8,9,10} που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται συμπλήρωμα του συνόλου Α.

Ορισμός 1.2.4

Η διαφορά συνόλων (–):Β–Α={x|x∈B∧x∉A} είναι το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του Β, που δεν ανήκουν όμως στο Α.

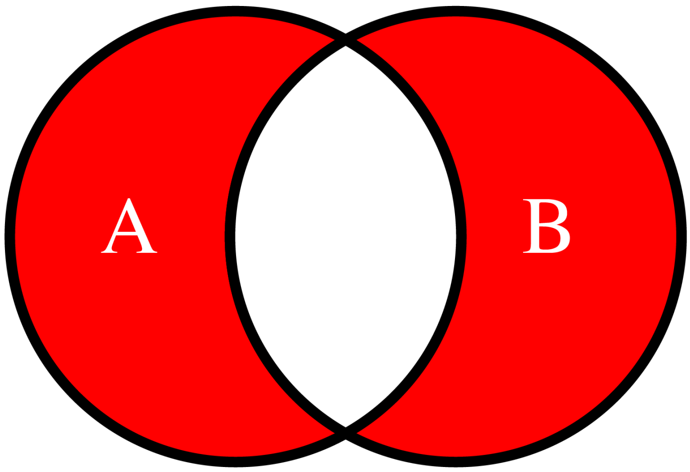
Προφανώς, αν το Β είναι το καθολικό σύνολο του Α, τότε το Β-Α είναι το συμπλήρωμα του Α. Ένας άλλος τρόπος να εκφραστεί το Β-Α, είναι με χρήση της τομής και του συμπληρώματος: $B\text{-}A=B\cap A^c$.



Σχήμα 1.2.3 *Η χρωματισμένη περιοχή είναι η διαφορά συνόλων Β–Α.*

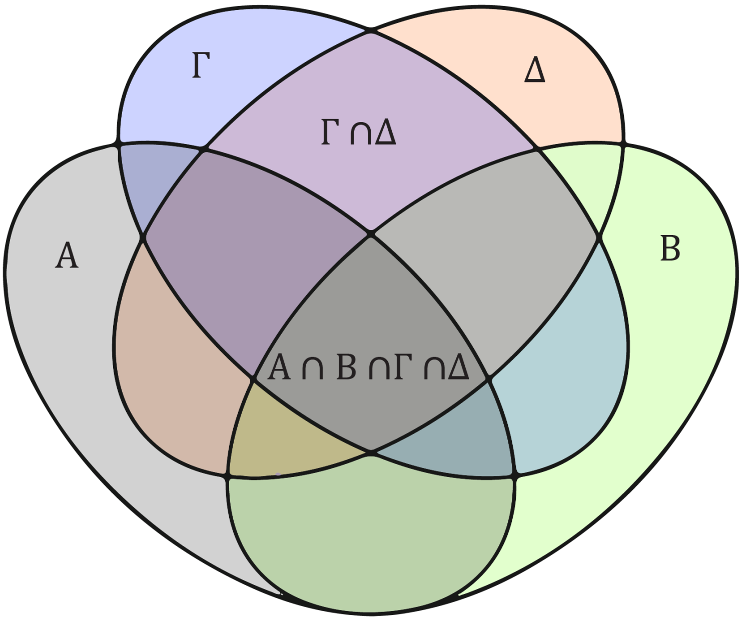
Ορισμός 1.2.5

Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων Α και Β συμβολίζεται με Α⊕Β και είναι το σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο Α ή στο Β αλλά όχι και στα δύο.



Σχήμα 1.2.4 *Η χρωματισμένη περιοχή είναι η συμμετρική διαφορά Α⊕Β των συνόλων Α και Β.*

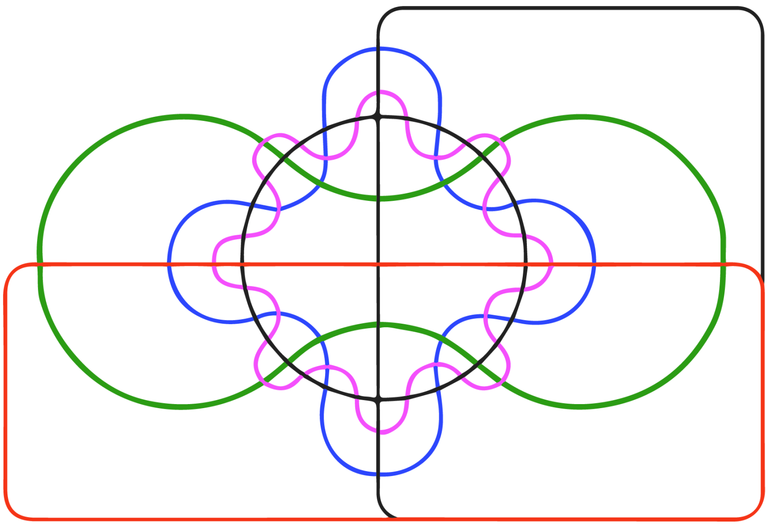
Η τομή περισσότερων συνόλων επιτρέπει την εποπτική διαχείρισή της με τη χρήση των διαγραμμάτων Venn. Αυτό είναι εφικτό όταν ο αριθμός των όρων (συνόλων) που εμπλέκονται στην τομή δεν είναι εξαιρετικά μεγάλος. Στο **Σχήμα 1.2.5** φαίνεται η περίπτωση τεσσάρων συνόλων και των κοινών περιοχών τους. Οι κοινές περιοχές αντιστοιχούν στην τομή των συνόλων είτε αυτές αντιστοιχούν σε δύο σύνολα, είτε σε τρία ή τέσσερα.



Σχήμα 1.2.5 *Διάγραμμα Venn της τομής τεσσάρων συνόλων Α, Β, Γ και Δ.*

Δεν είναι όμως το ίδιο εύκολο να εκφραστεί το διάγραμμα Venn για περισσότερα σύνολα. Στο **Σχήμα 1.2.6** γίνεται μια προσπάθεια να περιγραφεί το σύνολο των 64 δυνατών συνδυασμών τομής των συνόλων ανά 1, 2, 3, 4, 5 και 6 Ο αριθμός 64 προκύπτει από το άθροισμα των συνδυασμών.
$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=64$.

Η σχεδίαση του διαγράμματος έχει καταστεί εξαιρετικά δύσκολη.



Σχήμα 1.2.6 *Διάγραμμα Venn της τομής 6 συνόλων.*

1.3. Άλγεβρα Συνόλων

Το σύνολο περιγράφεται δια των στοιχείων του. Συνήθως τα στοιχεία ενός συνόλου είναι ομοειδή, αλλά αυτό δεν είναι απαίτηση, καθώς είναι δυνατό σε ένα σύνολο να περιλαμβάνονται και μη ομοειδή στοιχεία. Για παράδειγμα το σύνολο της γραφικής ύλης που βρίσκεται στο γραφείο σας μπορεί να αποτελείται από διαφορετικά ήδη (στυλό, τετράδια, συνδετήρες κ.λπ.).

Στη βιβλιογραφία η αναφορά σε ένα σύνολο γίνεται με δυο τρόπους.

- Με αναφορά των στοιχείων μέσα σε μύστακες ({}), όπως για παράδειγμα: {1,2,3,4}.
- Με περιγραφή των στοιχείων του συνόλου μέσα σε μύστακες όπως για παράδειγμα: {2x|x∈n}.

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε Α={2,4,6}.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής: Β={1,2,3,...,100},ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του».

2. Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με: $\{x \in \mathbb{R} | x>0\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου x>0». Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται: $\{x \in \mathbb{Z} | x$ άρτιος$\}$.

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με {x∈Ω|x έχει την ιδιότητα Ι} και διαβάζεται «Το σύνολο των x∈D, όπου x έχει την ιδιότητα Ι». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα Α={1,2,3,...,15}.και Β={1,2,3,...,100}.

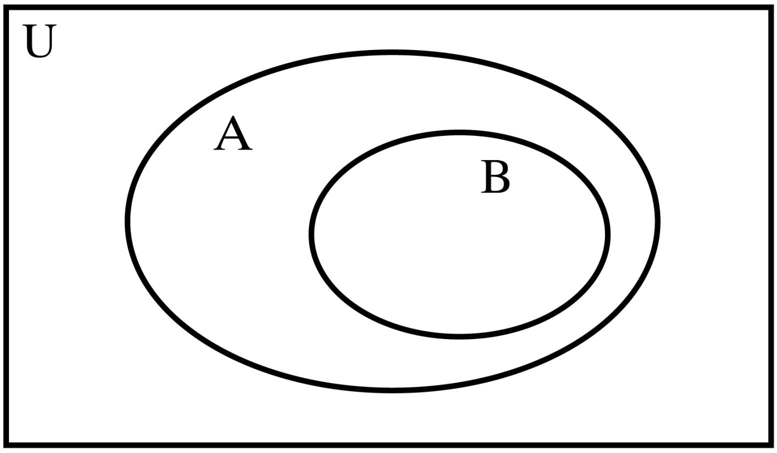
Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του συνόλου Β. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το Α είναι υποσύνολο του Β.

Ορισμός 1.3.1

Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

Υποσύνολο ενός συνόλου είναι επίσης σύνολο. Για τα σύνολα Α και Β, η παράσταση $A \subseteq B$ σημαίνει ότι για όλα τα x∈A, θα ισχύει ότι x∈B. Αυτό σημαίνει ότι το Α είναι υποσύνολο του Β. Με άλλα λόγια ένα σύνολο Α είναι υποσύνολο ενός συνόλου Β όταν όλα τα στοιχεία του Α είναι και στοιχεία του Β.

Στο **Σχήμα 1.3.1** το διάγραμμα του Venn, αποδίδει τη σχέση των συνόλων.



Σχήμα 1.3.1 *Διάγραμμα στο οποίο φαίνεται ότι τα στοιχεία του συνόλου Β ανήκουν στο σύνολο Α.*

Αν $A \supset B$, τότε το Β παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Α.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \supset B$. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

- $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο Α.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.
- Θα λέμε ότι $A \subset B$ ανν $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$.

Μετά από αυτά, η έκφραση $\{2x | x \in n\}$ σημαίνει ότι πρόκειται για το σύνολο όλων των αριθμών της μορφής 2x τέτοιοι ώστε το x είναι στοιχείο των Φυσικών Αριθμών.

Το ίδιο σύνολο μπορεί να παρασταθεί με αναφορά των στοιχείων $\{0,2,4,6,...\}$, όπου τα αποσιωπητικά ερμηνεύονται ότι τα στοιχεία συνεχίζουν να εμφανίζονται δίχως άνω φράγμα.

Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται «Βασικό ή Καθολικό Σύνολο» και συμβολίζεται με U. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $U=\mathbb{R}$.

Το σύνολο που συμβολίζεται (Ø) είναι το σύνολο που στερείται στοιχείων, το «κενό σύνολο». Συμβολίζεται και με τους μύστακες.

Οι συμβολισμοί Ø, {0}, and 0 δεν αποδίδουν τις ίδιες έννοιες.

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A=\{x \in R | x^2=-1\}$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2=-1$ είναι αδύνατη στο R. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται «κενό σύνολο» και συμβολίζεται με Ø ή { }.

Ορισμός 1.3.2

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

Δεχόμαστε ότι το **κενό σύνολο** είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Οι πρώτοι αφορούν σύνολα (το κενό και το μονοσύνολο που περιλαμβάνει το στοιχείο 0), ενώ ο τρίτος είναι ένα στοιχείο και δεν είναι σύνολο.

Τα πλέον συνηθισμένα σύνολα που συναντούμε στα μαθηματικά κείμενα είναι:

- $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,...\}$ (το σύνολο των ακεραίων αριθμών).
- $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ (το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων).
- $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,...\}$ (το σύνολο των θετικών ακεραίων).
- $\mathbb{Q}=\{a/b|a,b\in Z\wedge b\neq 0\}$ (το σύνολο των ρητών αριθμών).
- $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

1.4. Νόμοι της Άλγεβρας των Συνόλων

$(A^c)^c=A$	Νόμος της ενέλιξης.
$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$	Νόμοι De Morgan.
$A\cup B=B\cup A$ $A\cap B=B\cap A$	Νόμοι αντιμετάθεσης.
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B))\cup C$. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	Προσεταιριστικοί νόμοι.
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cup C)$	Επιμεριστικοί νόμοι.
$A\cup A=A$. $A\cap A=A$	Νόμοι του ταυτοδύναμου.
$A\cup\emptyset=A$. $A\cap U=A$	Ταυτοτικοί νόμοι.
$A\cup A=U$. $A\cap A=\emptyset$	Νόμοι του συμπληρώματος.
$A\cup U=U$. $A\cap\emptyset=\emptyset$	Νόμοι της επικράτησης.
$A\cup(A\cap B)=A$. $A\cap(A\cup B)=A$	Νόμοι της Απορρόφησης.

1.5. Ισότητα των Συνόλων

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα: $A=\{1,2\}$ και $B=\{x\in R|(x-1)(x-2)=0\}$.

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-2)=0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο B έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το A. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα.

Ορισμός 1.5.1

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα σύνολα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια: «Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A». Στην περίπτωση αυτή γράφουμε A=B.

Η ισότητα συνόλων αποδεικνύεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Οι δυο πρώτοι ακολουθούν την ίδια μεθοδολογία που ακολουθείται και για την απόδειξη ισότητας στην άλγεβρα Boole.

- Με χρήση των νόμων της Άλγεβρας των Συνόλων.
- Με χρήση πινάκων λειτουργίας.

Ιδιότητες των διμελών σχέσεων στην Άλγεβρα των συνόλων.

Παράδειγμα 1.5.1
Θα δείξουμε ότι $A=(A–B)\cup(A\cap B)$.

Απόδειξη

Για κάθε ζεύγος συνόλων Α και Β, ισχύει:

$(A–B)\cup(A\cap B)$	$=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)$,	Εκ του ορισμού της διαφοράς.
$=A\cap(B^c\cup B)$,		Επιμεριστικός νόμος.
$=A\cap U$,		Νόμος του αντιστρόφου.
$=A$,		Ταυτοτικός Νόμος.

Άλλος τρόπος για να δείξουμε ότι δυο σύνολα είναι ίσα είναι με τη βοήθεια πίνακα στον οποίο παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της πράξης (ή των πράξεων) για κάθε ζεύγος στοιχείων, που λαμβάνονται από το πρώτο και το δεύτερο σύνολο αντίστοιχα. Γενικεύοντας, και επειδή η ισότητα σημαίνει ότι αν $x\in A\Leftrightarrow x\in B$, για ένα οποιοδήποτε στοιχείο, τότε η αμφίδρομη αυτή σχέση θα οδηγήσει στη σύγκριση των τιμών του πίνακα.

Η ισότητα $A=(A–B)\cup(A\cap B)$ μα οδηγεί να συγκρίνουμε τις στήλες, που δημιουργούνται στα δύο μέλη.

Πίνακας 1.5.1 *Πίνακας λειτουργίας.*

A	**B**	**A-B**	**A∩B**	**(A–B)∪(A∩B)**
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Τέλος, ένας τρίτος τρόπος για να δείξουμε ότι δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα στηρίζεται στην ταυτόχρονη απόδειξη $A\subseteq B$ και $B\subseteq A$.

Η παρουσίαση αυτής τα τρίτης μεθόδου θα γίνει επί του παραδείγματος $A=(A-B)\cup(A\cap B)$.

Μέρος 1: Δείξτε ότι $A\subseteq B(A-B)\cup(A\cap B)$.

Έστω ένα στοιχείο $x\in A$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x\in(A-B)\cup(A\cap B)$.

Υποθέτουμε ότι $x\notin B$. Εξ ορισμού, γνωρίζουμε ότι $x\in(A–B)$, και συνεπώς πρέπει να ανήκει και στο $(A-B)\cup(A\cap B)$, επειδή το $(A-B)$ είναι υποσύνολο του $(A-B)\cup(A\cap B)$.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όταν $x\in B$. Σε αυτή την περίπτωση, εξ ορισμού είναι γνωστό ότι $x\in A\cap B$ από όπου συνεπάγεται ότι $x\in(A-B)\cup(A\cap B)$, που δείχνει ότι ισχύει το πρώτο μέρος.

Μέρος 2: Θα δείξουμε ότι $(A-B)\cup(A\cap B)\subset A$.

Είναι αρκετό να δειχτεί ότι $((A-B)\subset A)$ και $((A\cap B)\subset A)$.

Για να ισχύει ότι $x\in(A-B)$ πρέπει το $x\in A$, που δείχνει το 1ο μέρος. Επιπλέον, μια απαίτηση για να ισχύει ότι $x\in(A\cap-B)$ είναι να ισχύει ότι $x\in A$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του 2ου μέρους.

Δείχτηκε λοιπόν ότι $(A-B)\cup(A\cap B)\subset A$.

1.6. Ασαφή Σύνολα

Όταν τα χαρακτηριστικά των στοιχείων ενός συνόλου είναι ποιοτικά, δύσκολα μπορούμε να αποφασίσουμε αν ένα έκαστο εξ αυτών ανήκει στο σύνολο. Για παράδειγμα χαρακτηριστικά όπως «ψηλός» «έξυπνος», «ταχύς», που ορίζουν ποιοτικά έναν άνθρωπο, επιτρέπουν υποκειμενική απόφαση περί της ένταξης ενός συγκεκριμένου ανθρώπου στα σύνολα των ψηλών, των έξυπνων ή των ταχέων ανθρώπων. Είναι προφανές ότι η έννοια του κλασικού συνόλου, όπως την ορίσαμε μέχρι τώρα, δεν εξυπηρετεί καθώς εδώ διακρίνεται ασάφεια ως προς την έννοια του «ανήκειν».

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, αναπτύχθηκε μια νέα περιοχή στη Θεωρία Συνόλων και στην Τοπολογία. Πρόκειται για την θεωρία των **ασαφών συνόλων**, που έκανε την εμφάνισή της το 1965. Η βασική ιδέα για τον ορισμό των Ασαφών Συνόλων από τον Lotfi Aliaskerzadeh (L.Zadech), υπήρξε η γενίκευση της συνάρτησης συμμετοχής ενός συνόλου.

Ως γνωστόν κάθε στοιχείο X ενός κλασικού (μη ασαφούς) συνόλου A μπορεί να εκφραστεί με τη συνάρτηση συμμετοχής I_x:A→{0,1}.

Πράγματι, αν ορίσουμε το σύνολο $\{0,1\}^A=\{f/f:A\to\{0,1\}\}$ τότε η δομή $P(A)=\langle P(A),\cup,\cap,^c,f\rangle$ είναι ισόμορφη με τη δομή $I(A)=\langle\{0,1\}^A,\max(.,.),\min(.,.),\neg,0,1\rangle_X$ όπου max(. ,.) και min(. ,.) είναι σχέσεις μεταξύ φραγμένων συναρτήσεων. Επίσης με 0 και 1 στη δομή I(A) συμβολίζουμε τις αντίστοιχες σταθερές συναρτήσεις ελπίζοντας πως δε δημιουργείται σύγχυση. Τέλος η μονομελής πράξη "¬" ορίζεται ως εξής: $\neg f:=1-f$.

Στα ασαφή σύνολα ένα στοιχείο συμμετέχει στο σύνολο με έναν βαθμό - τιμή που ανήκει στο διάστημα [0,1] και καλείται βαθμός συμμετοχής. Ο βαθμός συμμετοχής του κάθε στοιχείου x στο σύνολο δίνεται από τη συνάρτηση συμμετοχής f:A→[0,1]. Αν U είναι ο χώρος των στοιχείων x, τότε ένα ασαφές σύνολο A ορίζεται στον U σαν ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $A=\{x,f(x)/x\in U\}$, όπου $f(x)\in[0,1]$.

Ανάλογα με το αν το πεδίο ορισμού U αποτελείται από διακριτά στοιχεία ή είναι ένας συνεχής χώρος, τότε τα ασαφή σύνολα διακρίνονται σε διακριτά και συνεχή αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής ενός υποσυνόλου X του A για κάθε στοιχείο x του A εκφράζει τον βαθμό (0 ή 1) με τον οποίο το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A.

Γενικεύοντας τώρα, ορίζουμε ως «Ασαφές Υποσύνολο» του A κάθε συνάρτηση f:A→[0,1], όπου η τιμή f(x) για κάθε στοιχείο x του A δηλώνει τον βαθμό (degree) με τον οποίο το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο f. Ο όρος «ασαφές» δικαιολογείται ως εξής: Αν για κάποιο στοιχείο x είναι $0<f(x)<1$, τότε δεν είναι ξεκάθαρο αν το x ανήκει ή δεν ανήκει στο f. Το σύμβολο $[0,1]^A$ στο εξής θα παριστάνει το σύνολο των παραπάνω συναρτήσεων (ασαφών υποσυνόλων του A).

Οι πράξεις μεταξύ των ασαφών συνόλων ορίζονται με τη βοήθεια των αντίστοιχων συναρτήσεων, όπως ακριβώς στη δομή I(A). Για τον ορισμό της πράξης της «τομής» μεταξύ ασαφών συνόλων μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία συνάρτηση (διμελής πράξη στο [0,1]):

$T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$T(x,1)=x,\forall x\in[0,1]$

$T(x,y)\leq T(z,w),\forall x\leq z\wedge y\leq w$

$T(x,y)\leq T(y,x),\forall x,y\in[0,1]$

$T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z),x,y,z\in[0,1]$.

Μία τέτοια συνάρτηση T λέγεται t-norm. Σε κάθε t-norm αντιστοιχεί μία συνάρτηση, η οποία ορίζεται από τη σχέση: $S(x,y)=1-T(1-x,1-y)y)$ και λέγεται t-conorm. Για τον ορισμό της πράξης της «ένωσης» μεταξύ δύο ασαφών συνόλων που αντιστοιχεί σε μία «τομή» χρησιμοποιείται η αντίστοιχη t-conorm.

Τελικά οδηγούμαστε στη δομή $F(A)=\langle[0,1]^A,S(.,.),T(.,.),^c,0,1\rangle$

που είναι η δομή των ασαφών υποσυνόλων του A. Εννοείται ότι μπορούμε να ορίσουμε πολλές «τομές» και «ενώσεις» μεταξύ των ασαφών συνόλων. Θεωρητικά μπορούμε να ορίσουμε τόσες «τομές» και «ενώσεις», όσες είναι οι t-norms και οι αντίστοιχες t-conorms. Πράγματι στη θεωρία ασαφών συνόλων βλέπουμε να ορίζονται πολλές τέτοιες πράξεις με ιδιαίτερη ονομασία η κάθε μία.

Παρατηρούμε ότι ο περιορισμός όλων των t-norms στο {0,1} είναι η πράξη min(.,.), ενώ ο περιορισμός των t-conorms είναι η πράξη max(.,.). Επίσης παρατηρούμε πως το σύνολο των ασαφών υποσυνόλων του X είναι επέκταση του δυναμοσυνόλου του X. Έτσι ο περιορισμός όλων των «τομών» των ασαφών συνόλων στα κλασικά (crisps) σύνολα είναι η γνωστή πράξη της τομής μεταξύ των κλασικών συνόλων και ο περιορισμός όλων των «ενώσεων» των ασαφών συνόλων στα κλασικά σύνολα είναι η γνωστή πράξη της ένωσης μεταξύ των κλασικών συνόλων.

Οι δυο βασικές πράξεις της άλγεβρας συνόλων που ορίστηκαν όπως παρακάτω:

$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

$A^c=\{x|x\notin A\}$.

Μπορούν να εκφραστούν με ανάλογο τρόπο λαμβάνοντας υπόψη τις συναρτήσεις συμμετοχής των A και B:

Ορισμός 1.6.1

Ασαφής ένωση καλείται η ένωση δύο ασαφών συνόλων A και B είναι ένα ασαφές σύνολο το οποίο συμβολίζεται με C=A∪B. Η συνάρτηση συμμετοχής του C προκύπτει από τις συναρτήσεις συμμετοχής των A και B ως εξής: $f_c(x)=\max(f_A(x),f_B(x))=f_A(x)\vee f_B(x)$, ∀x,∈U.

Ορισμός 1.6.2

Ασαφής Τομή καλείται η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B είναι ένα ασαφές σύνολο το οποίο συμβολίζεται με C=A∩B.Η συνάρτηση συμμετοχής του C προκύπτει από τις συναρτήσεις συμμετοχής των A και B ως εξής: $f_c(x)=\min(f_A(x),f_B(x))=f_A(x)\wedge f_B(x)\forall x,\in U$

Ορισμός 1.6.3

Ισχύει ότι $f_AC(x)=1-f_A(x)$ ∀x∈A.

Τέλος, αναφέρεται η πράξη της ασαφούς διχοτόμησης, η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.6.4

Ασαφής Διχοτόμηση είναι μια συνάρτηση t:[0,1]×[0,1]→[0,1] η οποία λαμβάνει ως είσοδο τις συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A και B και επιστρέφει ως έξοδο τη συνάρτηση συμμετοχής της τομής των A και B, δηλαδή $t[f_A(x),f_B(x)]=f_{A\cap B}(x)$.

Στην περίπτωση της ασαφούς τομής, ισχύει $f_C(x)=\max(f_{AB}(x),f_B(x))=\min(f_{AB}(x),f_B(x))$. Πρόκειται λοιπόν για ένα τελεστή (δηλαδή μια απεικόνιση συναρτησιακών χώρων σε συναρτησιακούς χώρους), που εκτός από τον ορισμό με χρήση της min norm, συναντάται στη βιβλιογραφία και με τρεις άλλους ορισμούς, όπως:

Αλγεβρικού γινομένου: $t[f_A(x),f_B(x)]=f_A(x)f_B(x)$.

Δραστικού γινομένου : $t[f_A(x),\ f_B(x)]=\begin{cases} f_A & όταν\ f_B=1,\\ f_B & όταν\ f_A=1,\\ 0 & στις\ λοιπές\ περιπτώσεις \end{cases}$

Γινόμενου του Einstein: $t[f_A(x),f_B(x)]=(f_A(x)f_B(x))/(2-(f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x))$.

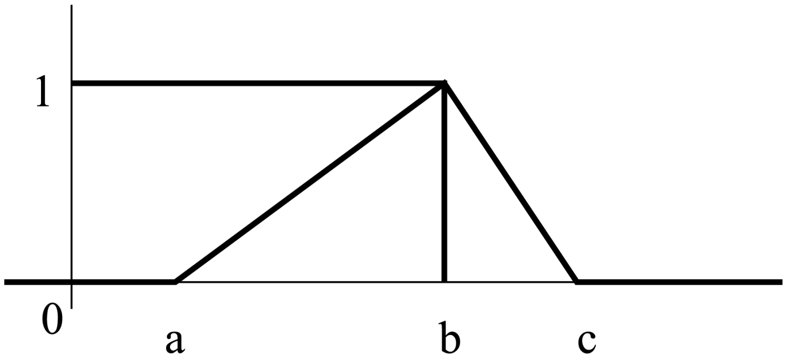
1.7. Μορφές Συναρτήσεων Συμμετοχής

Η γενική μορφή των συναρτήσεων συμμετοχής είναι παραμετρική και έτσι δίνεται η ευκαιρία στους χρήστες να της δώσουν τη μορφή που επιθυμούν. Η πλέον χρησιμοποιούμενη συνάρτηση συμμετοχής είναι η τριγωνική. Εκτεταμένη επίσης χρήση έχει και η συνάρτηση συμμετοχής παραλληλόγραμμου, καθώς και εκείνη του τραπεζίου. Οι μορφές αυτές χρησιμοποιούνται σε πιο εξειδικευμένες μορφές προτύπων.

Η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής δίνεται από τη σχέση:

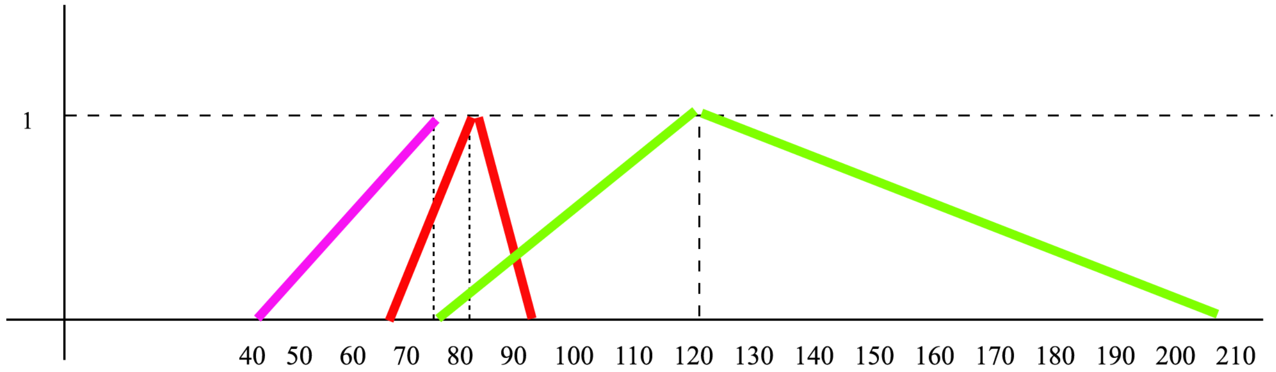
$$f(x,a,b,c)=\begin{cases} 0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & c\le x \end{cases}$$

Η ίδια συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να γραφεί και ως $f(x,a,b,c)=\max\{\min((x-a)/(b-a),(c-x)/(c-b)),0\}$



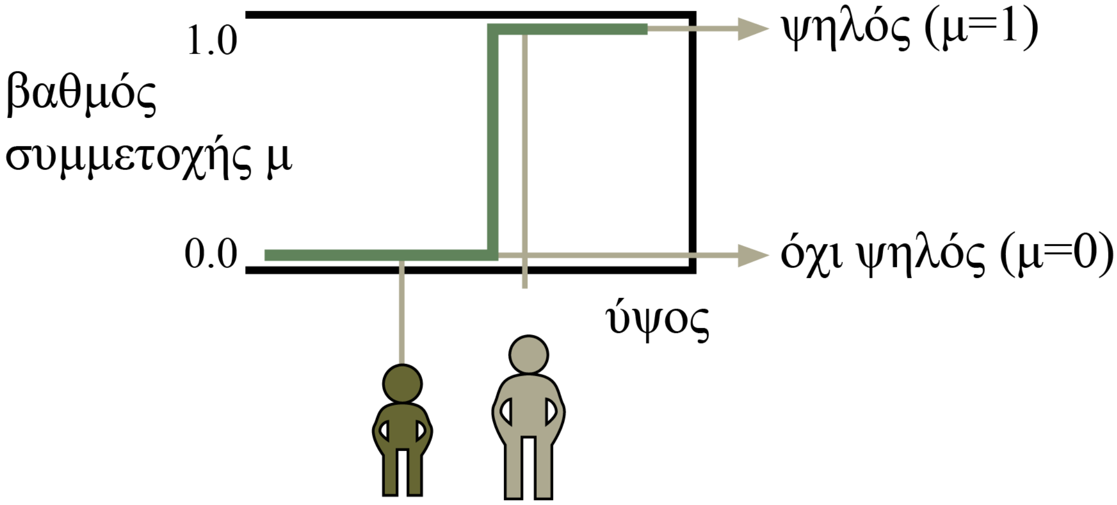
Σχήμα 1.7.1 *Γραφική παράσταση τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής.*

Παράδειγμα 1.7.1
Για την αναπαράσταση του συνόλου των ενήλικων Ελλήνων ανδρών, ως προς το βάρος τους κατηγοριοποιούμε τον πληθυσμό σε τρεις υποκατηγορίες: λιποβαρείς, κανονικού βάρους και υπέρβαροι. Η κλίμακα βάρους εκτείνεται από τα 40 kgr έως τα 210 kgr. Θεωρούμε ότι η κατηγορία «λιποβαρείς» αναφέρεται σε βάρη από 40 έως 75 kgr. Έτσι, η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής διαμορφώνεται σε:



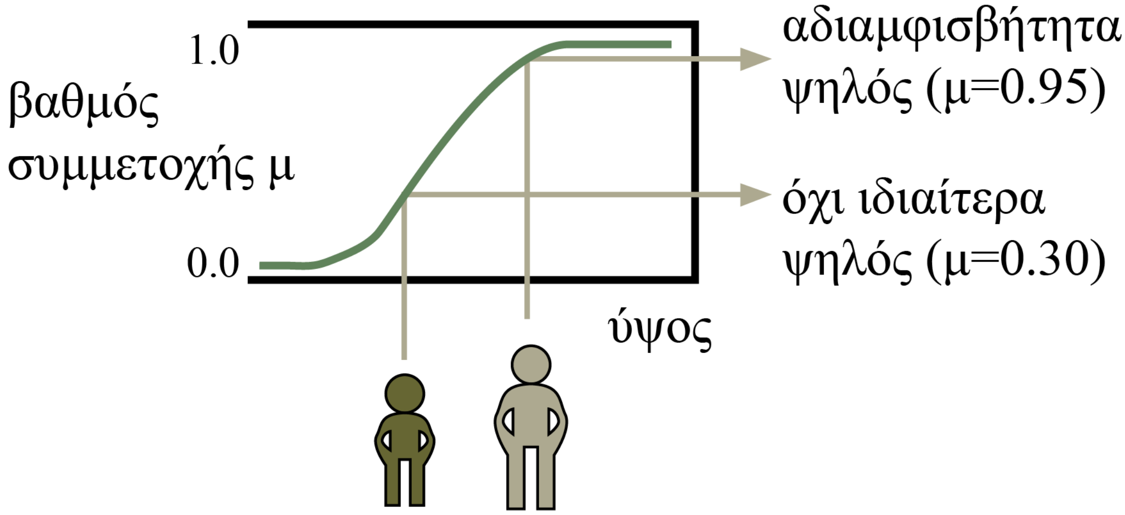
Σχήμα 1.7.2 *Τρεις τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής που περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται αντιληπτό το βάρος ενηλίκων Ελλήνων.*

Παράδειγμα 1.7.2
Ας υποθέσουμε ότι ο χώρος αναφοράς X είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων. Ένα ασαφές υποσύνολο του χώρου αυτού είναι οι ψηλοί άνθρωποι. Τα πιθανά ύψη έστω ότι κυμαίνονται από 1.20 μέχρι 2.50. Η λέξη «ψηλός» μπορεί να συσχετισθεί με μια καμπύλη η οποία δείχνει κατά πόσο ένας άνθρωπος είναι ψηλός ή όχι. Αν χρησιμοποιήσουμε τις αρχές των κλασικών συνόλων, τότε για να ορίσουμε το σύνολο των ψηλών ανθρώπων θα πρέπει να ορίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή ύψους, η οποία θα διαχωρίζει τους ανθρώπους σε ψηλούς και κοντούς. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτού του ύψους είναι 1.75m. τότε ένας άνθρωπος με ύψος 1.74 θα χαρακτηρίζεται κοντός ενώ ένας άνθρωπος με ύψος 1.76 θα χαρακτηρίζεται ψηλός. Ο παραπάνω διαχωρισμός φαίνεται παράλογος αφού έχουμε αντιστοιχίσει σε δύο ανθρώπους με αμελητέα διαφορά ύψους δύο αντίθετες μεταξύ τους έννοιες.



Σχήμα 1.7.3 *Κατηγοριοποίηση με σαφή συνοριακό διαχωρισμό.*

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την έννοια «ψηλός» είναι μέσω μιας καμπύλης που έχει ομαλή διακύμανση και μεταβαίνει από την έννοια ψηλός στην έννοια κοντός. Αυτή η καμπύλη είναι η συνάρτηση συμμετοχής του ασαφούς συνόλου των ψηλών ανθρώπων. Με άλλα λόγια δεχόμαστε ότι όλοι οι άνθρωποι είναι σε κάποιο βαθμό ψηλοί άλλα δεν είναι όλοι στον ίδιο βαθμό ψηλοί.



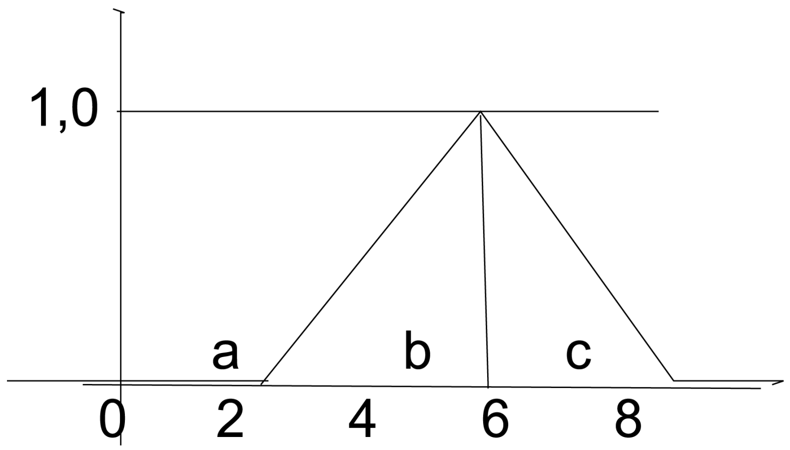
Σχήμα 1.7.4 *Κατηγοριοποίηση με ασαφή συνοριακό διαχωρισμό (διακρίνεται μεταβολή του βαθμού συμμετοχής μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων ανθρώπων).*

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υποκειμενικοί παράγοντες ενυπάρχουν στα χαρακτηριστικά της δομής ενός ασαφούς συνόλου. Η μορφή δηλαδή της καμπύλης δεν μπορεί να είναι η ίδια όταν αναφερόμαστε σε ενήλικες και ανήλικες, σε γυναίκες και άντρες κ.λπ. Η μορφή επίσης της καμπύλης επιλέγεται αυθαίρετα σύμφωνα με την αντίληψη που έχει κάθε άνθρωπος για την έννοια «ψηλός». Η μόνη προϋπόθεση που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση συμμετοχής είναι να βρίσκεται στο διάστημα τιμών [0 1]. Το σχήμα της επιλέγεται μεν αυθαίρετα, αλλά και με τρόπο που να διασφαλίζει όσο είναι δυνατό την απλότητα. Οι απλούστερες συναρτήσεις συμμετοχής είναι αυτές που σχηματίζονται από ευθείες γραμμές. Η απλούστερη από αυτές είναι η τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα τρίγωνο. Στην ίδια κατηγορία ανήκει και η τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής. Αυτές οι δύο συναρτήσεις εξασφαλίζουν την απαίτηση για απλότητα.

Η μαθηματική έκφραση της τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής είναι η εξής:

$$A = \begin{cases} 0, & \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in \left(a,b\right) \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & x \in \left(b,c\right) \\ 0, & \end{cases}$$

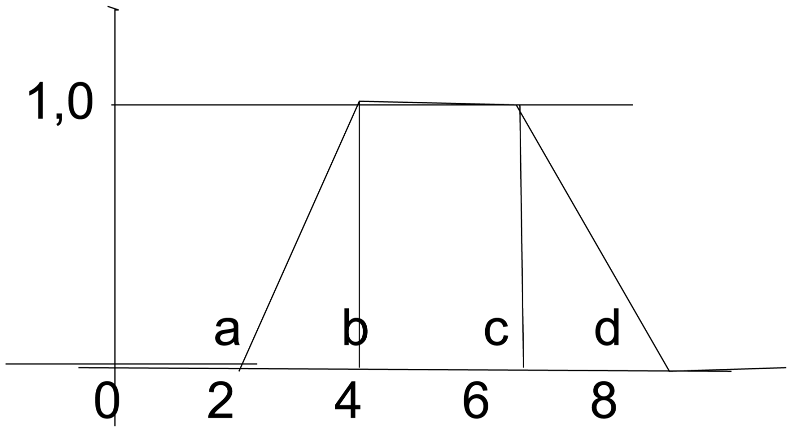
Και σχηματικά αναπαριστάται:



Σχήμα 1.7.5 *Τριγωνική Συνάρτηση Συμμετοχής.*

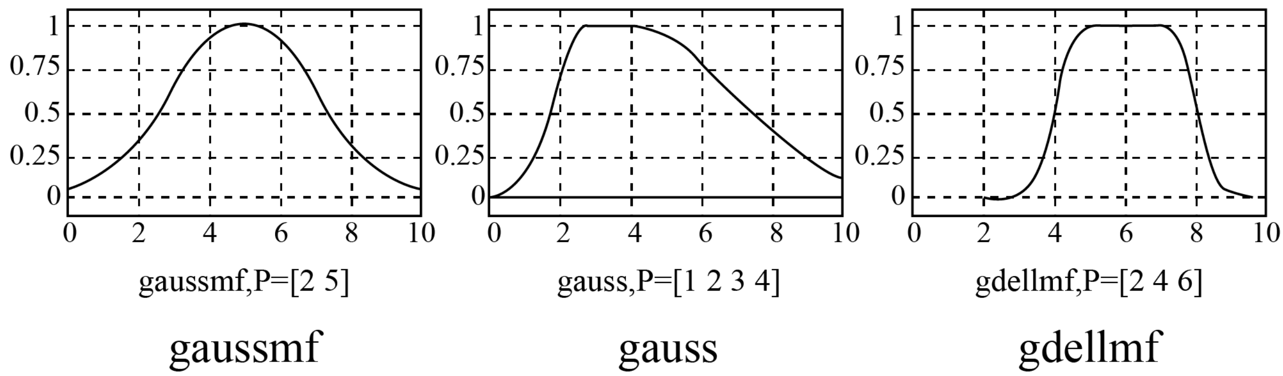
Παρακάτω δίνονται η μαθηματική έκφραση και η απεικόνιση της τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής:

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a} \\ \dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}, & \boldsymbol{x} \in \left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right) \\ 1, & \boldsymbol{x} \in \left(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right) \\ \dfrac{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}}, & \boldsymbol{x} \in \left(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\right) \\ 0 & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{d} \end{cases}$$



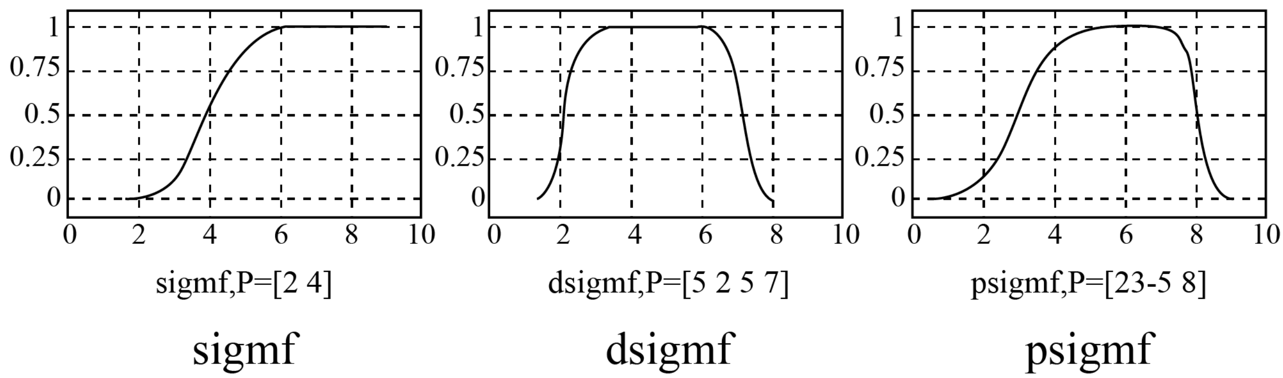
Σχήμα 1.7.6 *Συνάρτηση Συμμετοχής τύπου τραπεζίου.*

Δύο συναρτήσεις συμμετοχής που είναι δομημένες πάνω στη μορφή της κατανομής Gauss είναι μια απλή γκαουσιανή και μια σύνθεση δύο διαφορετικών γκαουσιανών. Η γενικευμένη συνάρτηση συμμετοχής με μορφή καμπάνας έχει τρεις παραμέτρους, μία παραπάνω από την γκαουσιανή. Η γκαουσιανή και η καμπάνα μπορούν να χρησιμοποιούνται συχνά στα ασαφή σύνολα λόγω της ομαλότητάς τους. Έχουν δε το πλεονέκτημα να διατηρούν μη μηδενικές τιμές σε όλα τα σημεία.



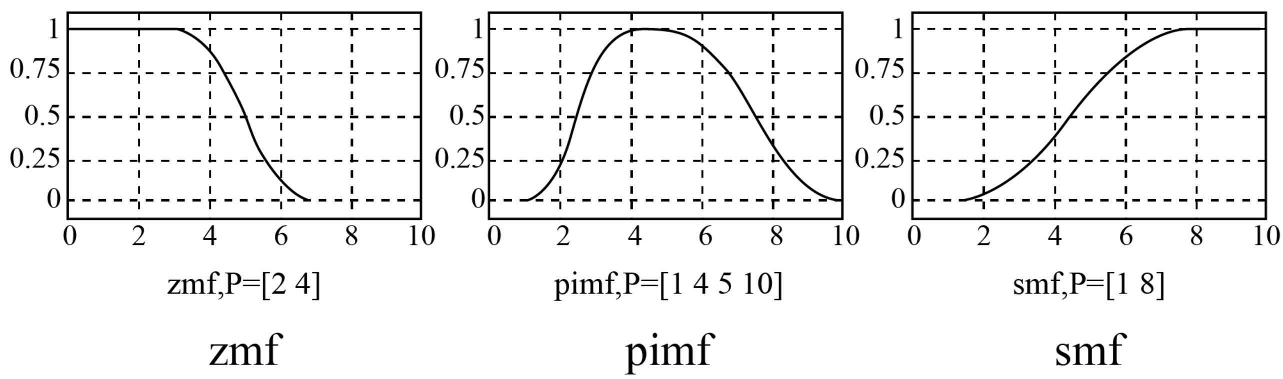
Σχήμα 1.7.7 *Άλλες μορφές Συναρτήσεων Συμμετοχής.*

Παρά το γεγονός ότι η γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής και η συνάρτηση καμπάνας επιτυγχάνουν ομαλή διακύμανση, δεν μπορούν να ορίσουν ασύμμετρες συναρτήσεις συμμετοχής που είναι χρήσιμες σε πολλά πρακτικά προβλήματα. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται η σιγμοειδής συνάρτηση συμμετοχής, η οποία είναι ασύμμετρη και ανοικτή είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Κλειστές συναρτήσεις συμμετοχής αυτού του τύπου μπορούν να παραχθούν αν συνθέσουμε δύο σιγμοειδείς. Έτσι, προκύπτει η διαφορά μεταξύ δύο σιγμοειδών και το άθροισμά τους.



Σχήμα 1.7.8 *Συναρτήσεις Συμετοχής τύπου Z, S και Π.*

Επίσης υπάρχουν πολλές πολυωνυμικές καμπύλες που τις χρησιμοποιούμε ως συναρτήσεις συμμετοχής. Τρεις από αυτές είναι η Z η S και η Π οι οποίες έχουν ονομαστεί έτσι εξαιτίας του σχήματός τους. Η Z είναι μια ασύμμετρη πολυωνυμική καμπύλη που είναι ανοικτή στα αριστερά, η S είναι η κατοπτρική της Z και η Π είναι μια ασύμμετρη κλειστή καμπύλη σχήματος Π.



Σχήμα 1.7.9 *Άλλες Συναρτήσεις Συμετοχής.*

1.8. Η Έννοια της Ασάφειας

Ο Καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών κ. Κων/νος Δρόσος εισάγει την ιδέα πως η μετάβαση από τα συμβατικά (κλασικά) μοντέλα της συνολοθεωρίας στα μη συμβατικά θα γινόταν με την εισαγωγή μη κλασικών αντικειμένων, όπου η λογική των σχετικών μοντέλων θα ήταν πλειότιμη. Έτσι λοιπόν η ασάφεια θα μπορούσε να εκφραστεί καλύτερα με τη βοήθεια της μη συμβατικής θεωρίας και της θεωρίας των μοντέλων του Boole. Στην ενότητα αυτή εκθέτουμε τη βασική ιδέα της προσέγγισης κατά Boole της ασάφειας.

Στην **Παράγραφο 1.6** είδαμε τη δομή I(A), που στηρίζεται στο σύνολο {0,1} εφοδιασμένο με αλγεβρικές πράξεις, ως ισόμορφη της δομής P(A). Αν όμως στηριχθούμε στην τετριμμένη άλγεβρα Boole 2={0,1}με τις γνωστές πράξεις και ορίσουμε τη δομή $2(A)=\langle \{0,1\}^x, \vee(.,.), \wedge(.,.), ^c, 0, 1\rangle$ τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι και οι δομές P(A) και 2(A) είναι ισόμορφες. Στη δομή 2(A) τις τιμές των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των υποσυνόλων του A τις ερμηνεύουμε ως τιμές αλήθειας των αντίστοιχων προτάσεων, δηλ. $I_X(x)=\|x\in X\|$.

Αν τώρα θεωρήσουμε το σύνολο $B^A=\{f/f{:}A\rightarrow B\}$ όπου B μια γενικότερη άλγεβρα Boole, τότε κάθε στοιχείο (συνάρτηση) του παραπάνω συνόλου ορίζει ένα ασαφές υποσύνολο του A. Επειδή όμως οι τιμές των συναρτήσεων αυτών είναι στοιχεία μιας άλγεβρας Boole, τα ασαφή αυτά σύνολα τα λέμε «IB-ασαφή υποσύνολα του A». Οι τιμές $f(x)$ των στοιχείων του παραπάνω συνόλου εκφράζουν τις τιμές αλήθειας των αντίστοιχων προτάσεων, δηλ. $f(x)=\|x\in f\|$.

Υπενθυμίζουμε πως το σύνολο A εδώ είναι ένα κλασικό σύνολο.

Αν ορίσουμε την τομή και την ένωση των B-ασαφών συνόλων με τη βοήθεια των πράξεων της άλγεβρας Boole B, όπως ακριβώς και στη δομή 2(A), τότε οδηγούμαστε στη δομή $B(A)=\langle B^x, \vee(.,.), \wedge(.,.), ^c, 0, 1\rangle$ που είναι η δομή των B-ασαφών υποσυνόλων του X.

Το πλεονέκτημα της παραπάνω δομής είναι ότι η λογική που χρησιμοποιείται στο σχετικό μοντέλο είναι η κλασική λογική, δηλ. η λογική που στηρίζεται σε άλγεβρες Boole. Στην παραπάνω όμως δομή η κλασική λογική δεν είναι η δίτιμη, διότι οι άλγεβρες Boole που χρησιμοποιούμε είναι γενικά πλειότιμες και όχι η τεριμμένη.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της μπουλιανής περίπτωσης είναι ότι για τον ορισμό ενός IB-ασαφούς υποσυνόλου του X, είτε στο X η ισότητα ορίζεται δίτιμα (συμβατικά μοντέλα) είτε πλειότιμα (μοντέλα του Boole) δεν απαιτείται συνάρτηση με πεδίον ορισμού (dom(f)) όλο το X, αλλά μία συνάρτηση με πεδίον ορισμού ένα υποσύνολο του X. Στην περίπτωση αυτή η τιμή αλήθειας για τη σχέση του «ανήκειν» για κάθε στοιχείο x του X ορίζεται ως εξής: $\|x\in f\|=\bigvee_{y\in \mathrm{domain}(f)} (f(y)\wedge\|x=y\|)$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούμε να ορίσουμε και άλλες «τομές» και «ενώσεις» μεταξύ των B-ασαφών συνόλων οι οποίες θα στηρίζονται σε νέες πράξεις μιας άλγεβρας Boole που θα ικανοποιούν τις ιδιότητες της t-norm και της t-conorm αντίστοιχα. Ο περιορισμός των πράξεων αυτών στα κλασικά σύνολα συμπίπτει με τις γνωστές πράξεις της τομής και της ένωσης.

Τέλος αναφέρουμε ότι όσα εκτέθηκαν παραπάνω αποτελούν τη βασική φιλοσοφία της έννοιας των ασαφών συνόλων. Αξίζει τον κόπο να μελετήσει κανείς και τις δύο προσεγγίσεις της ασάφειας για να δει πώς ορίζονται και πώς εφαρμόζονται σε ασαφές περιβάλλον οι συνήθεις έννοιες της συνολοθεωρίας.

Οδηγός για Περαιτέρω Μελέτη

Bollobás, B. (1979). *Graph Theory: An Introductory Course*. new York: Springer-Verlag.

Bollobás, B. (1998). *Modern Graph Theory*. new York: Springer-Verlag.

Borel, A. (1991). *Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics 126* (2nd ed.). Berlin, new York: Springer-Verlag, ISBn 978-0-387-97370-8, MR 1102012.

Cannon, J. J. (1969). Computers in group theory: A survey. *Communications of the Association for Computing Machinery 12*: 3–12, doi:10.1145/362835.9.42837, MR 0290613.

Carter, n.C. (2009). Visual group theory. *Classroom Resource Materials Series*, Mathematical Association of America, ISBn 978-0-88385-757-1, MR 2504193.

Du Sautoy, M. (2009). *Θεωρία Ομάδων: ο μαθηματικός, η συμμετρία, και το τέρας* (Μετάφραση: Κωνσταντίνος Σίμος), Αθήνα: Εκδόσεις ΤΡΑΥΛΟΣ, ISBn: 978-960-6640-59-9.

Elwes, R. (2006). An enormous theorem: the classification of finite simple groups. *Plus Magazine*, Issue 41, December.

Frucht, R. (1939). Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe. *Compositio Mathematica 6*: 239–50, ISSn 0010-437X.

Gorenstein, D. (1985). The Enormous Theorem. *Scientific American*, December, pp. 104-115.

Harary, F. (1994). *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Hodges, A. (1983). *Alan Turing: The Enigma*. new York: Simon and Shuster.

Judson, T. W. (1997). *Abstract Algebra: Theory and Applications*. Ελεύθερα προσβάσιμο PDF με άδεια ανοικτού κώδικα GFDL.

Kleiner, I., (1986). The evolution of group theory: a brief survey. *Mathematics Magazine 59*(4): 195–215, doi:10.2307/2690312, ISSn 0025-570X, JSTOR 2690312, MR 863090

Dubois, Didier & Prade, Henri M. (eds.) (2000). Fundamentals of fuzzy sets. *The Handbooks of Fuzzy Sets Series 7*, Springer.

La Harpe, P. (2000). *Topics in geometric group theory, Chicago*: University of Chicago Press, ISBn 978-0-226-31721-2.

Lin, T.Y. & Cercone, n. (eds.), (1997). Fuzzy Systems and Knowledge Discovery: Third International Conference.

Boston: Kluwer Academic Publishers, , pp. 301-321.

Livio, M. (2005). *The Equation That Couldn't Be Solved: How Mathematical Genius Discovered the Language of Symmetry*, Simon & Schuster, ISBn 0-7432-5820-7. Αναδεικνύει στην πράξη τη σημασία της θεωρίας ομάδων, ερμηνεύοντας πως αυτή η θεωρία δείχνει τις συμμετρίες στη φυσική καθώς και σε άλλες επιστήμες.

Mumford, David (1970). *Abelian varieties*, Oxford University Press, ISBn 978-0-19-560528-0, OCLC 138290.

Moore, R.E. (1966). *Interval Analysis*˝. new York: Prentice-Hall.

Yao, Y.Y. Combination of rough and fuzzy sets based on ζ-level sets. in: *Rough Sets and Data Mining: Analysis for Imprecise Data*, http://www2.cs.uregina.ca/~jtyao/Papers/qqvrs8.pdf.

Zimmermann, Hans-Jürgen (2001). *Fuzzy set theory—and its applications* (4th ed.). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Ronan M. (2006). *Symmetry and the Monster*. Oxford University Press. ISBn 0-19-280722-6.

Rotman, Joseph (1994). *An introduction to the theory of groups*. new York: Springer-Verlag, ISBn 0-387-94285-8.

Saaty, T. L. & Kainen, P. C. (1986). *The Four-Color Problem: Assaults and Conquest*. new York: Dover.

Schupp, Paul, E. Lyndon, & Roger C. (2001). *Combinatorial group theory*. Berlin, new York: Springer-Verlag, ISBn 978-3-540-41158-1.

Scott, W. R. (1987) [1964]. *Group Theory*, new York: Dover, ISBn 0-486-65377-3.

Shatz, S. S. (1972). *Profinite groups, arithmetic, and geometry*. Princeton: Princeton University Press, ISBn 978-0-691-08017-8, MR 0347778.

Trudeau, R. J. (1994). *Introduction to Graph Theory*. new York: Dover.

Weibel, Charles A. (1994). An introduction to homological algebra. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38*. Cambridge University Press, ISBn 978-0-521-55987-4, OCLC 36131259, MR 1269324.

Γεωργίου Δ. Α. (1994). *Εισαγωγή στα Διακριτά Μαθηματικά για την Επιστήμη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών*. Ξάνθη: Εταιρεία Αξιοποίησης Πανεπιστημιακής Περιουσίας του Δ.Π.Θ. .

Γιαννόπουλος Α., 834. (2013). *Θεωρία Ομάδων, ΕΚΠΑ.. Ανακτήθηκε 20 Οκτωβρίου 2015.

Κεχαγιάς Ε., Εισαγωγή στη Θεωρία των Ομάδων, Σημειώσεις του μαθήματος, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Ανακτήθηκε 20 Οκτωβρίου 2015.

Κουτσουπιάς Σημειώσεις «Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ».

Μοσχοβάκης: «Συνολοθεωρία» Σημειώσεις: «Μαθηματικά για την Πληροφορική».

http://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_theorem/ http://www.livepedia.gr

http://www.pre.aegean.gr/labs/mathlab/wp-content/uploads/2014/12/gm-x13-erg-pr2-fyl-1-apo-3.pdf.

http://www.pi-schools.gr/special_education_new/ftp/books/a_likeiou/l_a_arial-28b/l_a_algebra_arial_28b/l_a_algebra_bm_(1-54)_28b.doc.

http://users.auth.gr/epsom/introalg/algeb/groups.htm.

https://eagereyes.org/techniques/venn-diagrams.

Κριτήρια Αξιολόγησης

Κριτήριο Αξιολόγησης 1

Τι ονομάζουμε ζεύγος; Ποιο είναι το αντίστροφο του ζεύγους (α,β) ταυτοτικού ή όχι;
Πότε δύο ζεύγη (α,β) και (γ,δ) λέγονται ίσα;
Τι ονομάζουμε καρτεσιανό γινόμενο ενός συνόλου Α επί ένα σύνολο Β;
Τι ονομάζουμε διαγώνιο ενός καρτεσιανού γινομένου Α×Β. Για ποια Β εχει νόημα; Δωστε παράδειγμα.
Πώς ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο: Α×Β×Γ; Αναφέρατε σχετικό παράδειγμα; Αναφέρατε τρόπους αναπαράστασης του (τουλάχιστον τρεις)!!

Κριτήριο Αξιολόγησης 2

Από τα στοιχεία του συνόλου {1,2,3} να σχηματισθούν όλα τα δυνατά ζεύγη. Το ίδιο από τα στοιχεία του συνόλου: {α,β,#,0}.

Κριτήριο Αξιολόγησης 3

Να συμπληρωθούν τα δεύτερα μέλη των παρακάτω τεσσάρων ισοδυναμιών:
(α,β)=(1,4)⇔(;)　　　(3,β)=(α,7)⇔(;).
(α,1)=(1,β)⇔(;)　　　(γ,δ)=(2,2)⇔(;).

Κριτήριο Αξιολόγησης 4

Να αποδείξετε ότι: (x,y)∈Α×Α⇔(y,x)∈Α×Α;

Κριτήριο Αξιολόγησης 5

Ένα σύνολο Α έχει ν στοιχεία. Πόσα στοιχεία έχει το καρτεσιανό γινόμενο Α×Α και πόσα η διαγώνιός του; Πόσα διμελή σύνολα μπορούμε να σχηματίσουμε από τα ν στοιχεία του Α;

Κριτήριο Αξιολόγησης 6

Να αποδείξετε ότι : Α×Β=Γ×Δ⇔(Α=Γ και Β=Δ).

Κριτήριο Αξιολόγησης 7

Να αποδείξετε ότι : Α×Β=Α×Γ⇔Β=Γ∨Α=∅.

Κριτήριο Αξιολόγησης 8

Από τα σύνολα: Α={1,2,3} και Β={3,4} να σχηματιστούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα Α×Β,Β×Α,A^2=Α×Α,B^2=Β×Β καθώς και τα σύνολα (Α×Β)∩(Β×Α) και A^2∩B^2. Επιπλέον να κατασκευαστούν τα γραφήματα και τα διαγράμματα των τεσσάρων πρώτων συνόλων.

Κριτήριο Αξιολόγησης 9

Από τα σύνολα Α={α,β,γ},Β={γ,δ},Γ={δ,ε,ζ} να σχηματιστούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα γινόμενα Α×(Β∪Γ),(Α∪Β)×Γ,Α×(Β∩Γ),(Α∩Β)×Γ καθώς και τα σύνολα (Α×Β)∪(Α×Γ),(Α×Γ)∪(Β×Γ),(Α×Β)∩(Α×Γ),(Α×Γ)∩(Β×Γ).
Έπειτα, με τη βοήθεια των εξαγομένων να επαληθευτεί η επιμεριστική ιδιότητα του καρτεσιανού γινομένου ως προς την ένωση και την τομή δύο συνόλων.

Κριτήριο Αξιολόγησης 10

(1) $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \times B \subseteq \Gamma \times \Gamma$
(2) $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta \Rightarrow A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$
(3) $A \subseteq B \Rightarrow A \times B \subseteq B \times B$ και $A \times A \subseteq A \times B$
(4) $A \subseteq B \Rightarrow A \times A \subseteq B \times B$ και $A \times \Gamma \subseteq B \times \Gamma$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 11

Δίνονται τα σύνολα: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$, $\Gamma=\{1,2,3,4\}$. Να σχηματιστούν τα καρτεσιανά γινόμενα: $A \times A \times A$ και $A \times B \times \Gamma$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 12

Έστω U, W ένα σύνολο και A_1, $A_2 \subseteq U$ και B_1, $B_2 \subseteq W$. Χρησιμοποιήστε τα διαγράμματα Venn για να διαπιστώσετε ότι $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (A_1 \cap A_2)$.
Στη συνέχεια να αποδείξετε την παραπάνω σχέση γενικά.

Κριτήριο Αξιολόγησης 13

Να εξετάσετε αν ισχύει ότι : αν $A_1 \subseteq U_1$ και $A_2 \subseteq U_2$, τότε $(U_1 \times U_2)–(A_1 \times A_2)=[(U_1-A_1) \times U_2] \times [U_1 \times (U_2–A_2)]$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 14

Πόσες διαμερίσεις που κάθεμια να αποτελείται από 4 σύνολα μπορούμε να βρούμε σε ένα 7μελές σύνολο;

Κριτήριο Αξιολόγησης 15

Πόσες είναι όλες οι διαμερίσεις που μπορούμε να φτιάξουμε σε ένα τριμελές σύνολο;

Κριτήριο Αξιολόγησης 16

Να απαντήσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθεμια από τις προτάσεις που ακολουθούν.
Τα σύνολα $A=\{x/x2-1=0\}$ και $B=\{x/x \in Z^*$ με $-1 \leq x \leq 1\}$ είναι ίσα (περιλαμβάνεται και οι 0+i, 0-i)
$0=\emptyset$.
$\alpha \in \{\alpha\}$.
$\emptyset \subset \{\alpha\}$.
$\{\alpha\} \subseteq \{\alpha,\{\alpha\}\}$.
Το σύνολο $A=\{\emptyset,1,\alpha\}$ έχει 6 υποσύνολα:
Αν $A=\{x/|x|>1\}$ και $B=\{x/x \in (1,+\infty)$ τότε A=B.
Αν $A=\{0,\{0\},\emptyset,\{\emptyset\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\emptyset\}$ τότε $A \cup B=\{0,1,2,\{0\},\{1\},\{2\},\{\emptyset\},\emptyset\}$.
Αν $A=\{0,\{0\},\emptyset,\{\emptyset\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\emptyset\}$ τότε $A \cap B=\{0,1,\{\emptyset\}\}$.
Αν $A=\{0,\{0\},\emptyset,\{\emptyset\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\emptyset\}$ τότε $A-B=\{0,\{\emptyset\}\}$.
Αν $\Omega=\{0,\{0\},\emptyset,\{\emptyset\},1\}$ και $A=\{0,1\}$ τότε $A'=\{\{0\},\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 17

Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα $((A \cup B) \cap C)^c \cup B^c)^c=(B \cap C)$.

Κριτήριο Αξιολόγησης 18

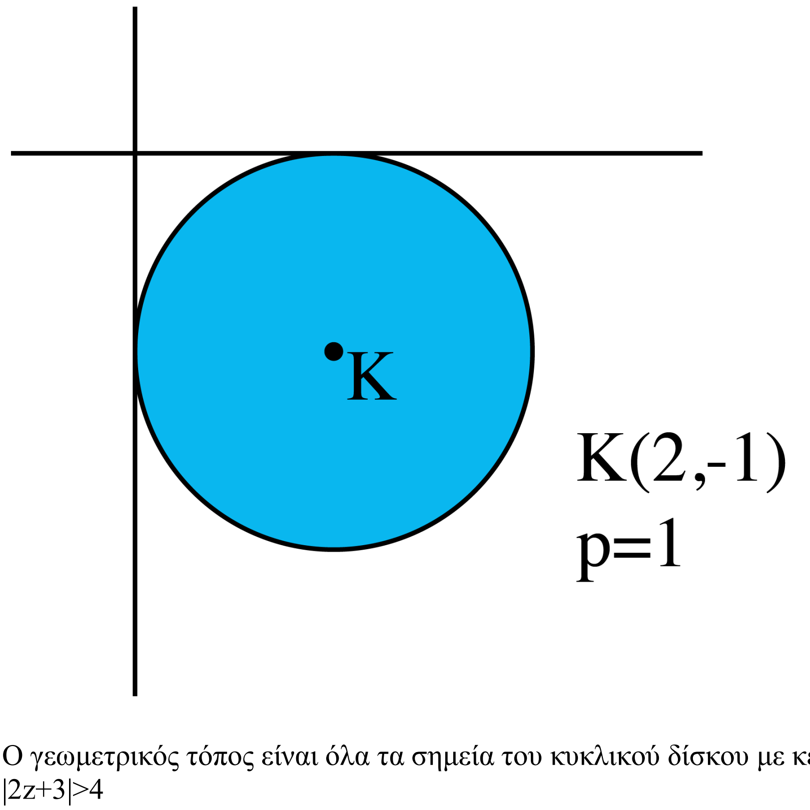
Να δείξετε ότι:
Για οποιοδήποτε σύνολο P, το P είναι υποσύνολο του P.
Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιοδήποτε συνόλου, αλλά το κενό σύνολο δεν είναι πάντα στοιχείο ενός οποιουδήποτε συνόλου.
Το σύνολο {Ø} δεν είναι υποσύνολο του {{Ø}}, αν και είναι στοιχείο του συνόλου {{Ø}}.
P∩Q.

Κριτήριο Αξιολόγησης 19

Να σχεδιάσετε τα σύνολα:
|z-2+i|>1
|2z+3|>4
|z-2+i|>1

Απάντηση:

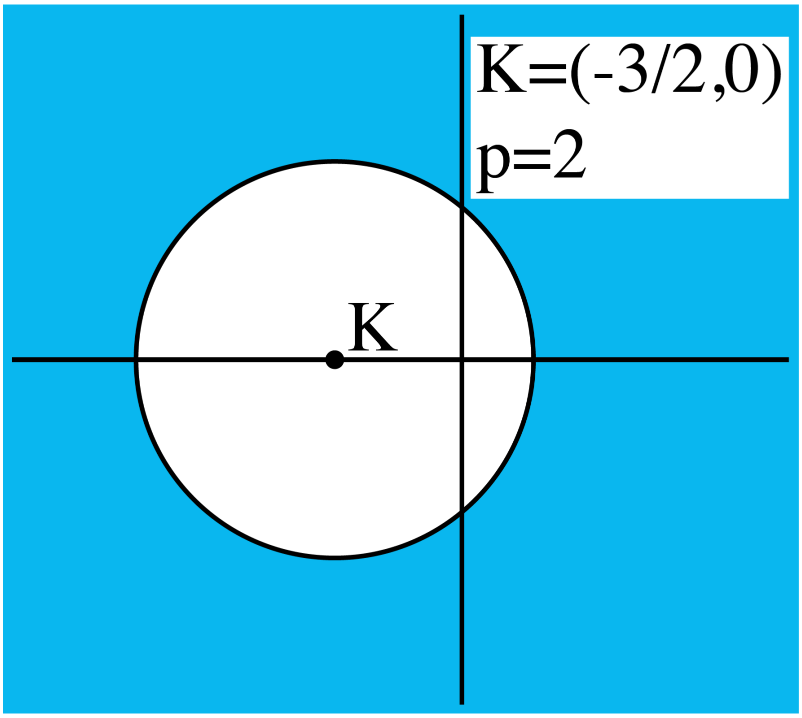
Θέτω z=x+yi
|x+yi-2+i|<1
|(x-2)+(y+1)i|<1
$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}<1$
$(x-2)^2+(y+1)^2<1$



Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο το (2,-1) και ρ=1.
|2z+3|>4

ΙΙ) Έστω z=x+yi
|2z+3|>4
|2x+2yi+3|>4
$\sqrt{(2x+3)^2+(2y)^2}>4$

$(2x+3)^2+(2y)^2>16$
$(2x+3/2)^2+y^2>4$



Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία εκτός του κύκλου με K(-3/2,0) και ρ=2.

[Περισσότερα Κριτήρια Αξιολόγησης]