Οικονομικά Μαθηματικά

Μονοβασίλης Θεόδωρος
Καλογηράτου Ζαχαρούλα

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΜΟΝΟΒΑΣΙΛΗΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΚΑΛΟΓΗΡΑΤΟΥ ΖΑΧΑΡΟΥΛΑ
Καθηγήτρια

Οικονομικά Μαθηματικά

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Οικονομικά Μαθηματικά

Συγγραφή

Μονοβασίλης Θεόδωρος

Καλογηράτου Ζαχαρούλα

Κριτικός αναγνώστης

Τσούνης Νικόλαος

ISBN: 978-960-603-128-1

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Πίνακας περιεχομένων

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές Οικονομικών Σχολών προκειμένου να καλύψει την ύλη του μαθήματος των "Οικονομικών Μαθηματικών".

Τα τρία πρώτα κεφάλαια πραγματεύονται την έννοια του απλού τόκου. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία των βραχυπρόθεσμων καταθέσεων, στο δεύτερο κεφάλαιο η έννοια της προεξόφλησης στον απλό τόκο και στο τρίτο η αντικατάσταση των γραμματίων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια του ανατοκισμού. Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται η θεωρία του σύνθετου ανατοκισμού, στο πέμπτο περιγράφονται οι ράντες και τέλος στο έκτο κεφάλαιο περιγράφεται η θεωρία των δανείων. Σε όλα τα κεφάλαια υπάρχει η απαιτούμενη θεωρία και λυμένα παραδείγματα. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται πολλές λυμένες και άλυτες ασκήσεις.

Κεφάλαιο 1

1. Απλός τόκος

1.1 Η εξίσωση του απλού τόκου

Αν τοκίσουμε ένα κεφάλαιο K για ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο i, τότε στο τέλος του έτους θα δημιουργηθεί τόκος ο οποίος θα δίνεται από τη σχέση: $I=K\cdot i$. Συνεχίζοντας, αν το ίδιο κεφάλαιο το τοκίσουμε για ένα ακόμη έτος, θα δώσει πάλι τόκο ίσο με $I=K\cdot i$. Συνολικά λοιπόν στα δύο έτη δημιουργείται τόκος $I_2=K\cdot 2\cdot i$. Σημειώνεται ότι ο δείκτης 2 στο σύμβολο του τόκου I δείχνει ότι πρόκειται για τον τόκο στα δύο έτη. Ανάλογα αν το κεφάλαιο τοκισθεί για τρία έτη, δημιουργούνται συνολικά τόκοι $I_3=K\cdot 3\cdot i$.

Συνεχίζοντας με την ίδια λογική μπορούμε να γενικεύσουμε τον τύπο για την εύρεση του τόκου μετά από n έτη ως εξής:

$$I_n = K\cdot n\cdot i$$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται στο τέλος των n ετών είναι ίσο με το αρχικό κεφάλαιο συν τους τόκους των n ετών, το συμβολίζουμε με K_n και είναι:

$$K_n = K + I_n$$

ή

$$K_n = K + K\cdot n\cdot i$$

Αυτή είναι η βασική εξίσωση του απλού τόκου όταν ο χρόνος εκφράζεται σε έτη και το επιτόκιο είναι ετήσιο.

Όταν έχουμε ετήσιο επιτόκιο, αλλά ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες, τον ανάγουμε σε έτη διαιρώντας με το 12, οπότε έχουμε για τον τόκο:

$$I_\mu = K\cdot \frac{\mu}{12}\cdot i$$

και για το νέο κεφάλαιο:

$$K_\mu = K + \frac{K\cdot \mu\cdot i}{12}$$

Όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες, τον ανάγουμε σε έτη διαιρώντας με το 365, οπότε για τον τόκο έχουμε:

$$I_\nu = K\cdot \frac{\nu}{365}\cdot i$$

και για το νέο κεφάλαιο:

$$K_\nu = K + \frac{K\cdot \nu\cdot i}{365}$$

Πολλές φορές, για ευκολία στους υπολογισμούς, θεωρούμε ότι το έτος έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας 30 ημέρες. Στην περίπτωση αυτή το έτος καλείται **εμπορικό έτος**. Το εμπορικό έτος χρησιμοποιείται στις συναλλαγές στις σκανδιναβικές χώρες, στη Γερμανία, στη Ρωσία κ.α.

Όταν χρησιμοποιούμε το ημερολογιακό έτος με τους μήνες στην πραγματική τους διάρκεια, δηλαδή 30 ή 31 ημέρες και 28 ή 29 για τον Φεβρουάριο, το έτος καλείται **πολιτικό έτος**. Το πολιτικό έτος το χρησιμοποιούν στις συναλλαγές τους η Μεγάλη Βρετανία και οι ΗΠΑ.

Κάτι ενδιάμεσο το οποίο χρησιμοποιείται από τη χώρα μας και άλλες χώρες (όπως Ιταλία, Ισπανία, Γαλλία κ.α.) είναι το **μικτό έτος**. Εδώ οι μήνες λαμβάνονται όπως στο ημερολογιακό έτος, αλλά το σύνολο των ημερών του έτους θεωρείται 360 ημέρες. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στον πίνακα 1.1:

Έτος	**Μήνας**	**Χρόνος**
Πολιτικό	28, 29, 30, 31 μέρες	365 ή 366 μέρες
Εμπορικό	30 μέρες	360 μέρες
Μικτό	28, 29, 30, 31 μέρες	360 μέρες

Πίνακας 1.1 *Είδη ετών*

1.1.1. Εύρεση του τόκου

Παράδειγμα 1
Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €3.000 το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 7% για 5 έτη.
Λύση
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$K = 3.000$$
$$n = 5$$
$$i = 0,07$$

στον τύπο του απλού τόκου:

$$I_5 = K \cdot n \cdot i \Rightarrow I_5 = K \cdot 5 \cdot i = 3.000 \cdot 5 \cdot 0,07 = 1.050$$

Παράδειγμα 2
Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €3.000 το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 4% για 8 μήνες.
Λύση
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$K = 3.000$$
$$\mu = 8$$
$$i = 0,04$$

στον τύπο του απλού τόκου

$$I_\mu = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \Rightarrow I_8 = \frac{3.000 \cdot 8 \cdot 0,04}{12} = 80$$

Παράδειγμα 3
Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €10.000 το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 9% για 70 ημέρες. (Έτος μικτό.)
Λύση
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$K = 10.000$$
$$\nu = 70$$
$$i = 0,09$$

στον τύπο του απλού τόκου

$$I_\nu = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow I = \frac{10,000 \cdot 70 \cdot 0.09}{360} = 175$$

Παράδειγμα 4
Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου €10.000 το οποίο τοκίστηκε από την 1η Ιανουαρίου 2015 έως τις 26 Μαρτίου 2015 με ετήσιο επιτόκιο 9%. (Έτος μικτό.)
Λύση
Από την 1η Ιανουαρίου 2015 έως τις 25 Μαρτίου 2015 έχει 31 μέρες ο Ιανουάριος, 28 μέρες ο Φεβρουάριος και 25 μέρες ο Μάρτιος, δηλαδή το κεφάλαιο μας τοκίζεται για 31+28+26-1=84 ημέρες.
Αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$K = 10.000$$
$$\nu = 84$$
$$i = 0,09$$

στον τύπο του απλού τόκου και έχουμε:

$$I_\nu = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow I = \frac{10.000 \cdot 84 \cdot 0,09}{360} = 210$$

Το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται είναι το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου, δηλαδή:

$$\tilde{K} = K + I = 10.000 + 210 = 10.210$$

1.1.2. Εύρεση του επιτοκίου

Παράδειγμα 5
Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο €15.000 για 5 έτη και έδωσε τόκο €4.500;
Λύση
Θα αντικαταστήσουμε τα δεδομένα της άσκησης στον τύπο του απλού τόκου (K=15.000 n=5 I=4.500).

$$I = K \cdot n \cdot i \Rightarrow i = \frac{I}{K \cdot n} \Rightarrow i = \frac{4.500}{75.000} = 0{,}06$$

Δηλαδή το επιτόκιο είναι 6%.

Παράδειγμα 6
Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο €7.000 από τις 15 Ιανουαρίου 2015 έως τις 20 Μαρτίου 2015 και έδωσε τόκο €112; (Έτος μικτό.)
Λύση
Ο αριθμός των ημερών που τοκίζεται το κεφάλαιο είναι:
Ιανουάριος: 17
Φεβρουάριος: 28
Μάρτιος: 20
Δηλαδή, συνολικά 17+28+20=65 ημέρες από τις οποίες αφαιρούμε μία, άρα έχουμε 64 τοκοφόρες ημέρες. (ν=64)
Επιπλέον, γνωρίζουμε το κεφάλαιο K=7920 και τον τόκο I=112.
Λύνουμε τον τύπο του απλού τόκου ως προς το επιτόκιο:

$$I = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow 360 \cdot I = K \cdot \nu \cdot i \Rightarrow i = \frac{360 \cdot I}{K \cdot \nu}$$

αντικαθιστούμε τα δεδομένα:

$$i = \frac{360 \cdot I}{K \cdot \nu} = \frac{360 \cdot 112}{7.000 \cdot 64} = 0{,}09$$

Παρατήρηση
Προκειμένου να προσδιορίσουμε τον αριθμό των τοκοφόρων ημερών μιας περιόδου, για να μην μετράμε τις ημέρες κάθε μήνα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον πίνακα τοκοφόρων ημερών. Ο πίνακας αυτός (1.2) σε κάθε ημερομηνία αντιστοιχίζει τον αριθμό ημερών από την 1η του έτους. Αρκεί να βρούμε σε πόσες ημέρες από την αρχή του έτους αντιστοιχεί η ημερομηνία έναρξης και λήξης της περιόδου τοκισμού και να τις αφαιρέσουμε για να βρούμε τις τοκοφόρες ημέρες που αντιστοιχούν.
Στο παραπάνω παράδειγμα η περίοδος τοκισμού είναι από 15 Ιανουαρίου 2015 μέχρι 20 Μαρτίου 2015.
Έναρξη στις 15 Ιανουαρίου 2015 σημαίνει 15 ημέρες από την 1η του έτους.
Λήξη στις 20 Μαρτίου 2015 σημαίνει 79 ημέρες από την 1η του έτους.
Άρα, οι τοκοφόρες ημέρες είναι: 79–15=64 ημέρες.
Αν η περίοδος τοκισμού εκτείνεται σε περισσότερα από ένα έτη π.χ. από 10 Νοεμβρίου 2014 έως 25 Φεβρουαρίου 2015, τότε υπολογίζουμε τον αριθμό των τοκοφόρων ημερών δύο περιόδων, δηλαδή από 10 Νοεμβρίου 2014 έως 31 Δεκεμβρίου 2014 και από 1η Ιανουαρίου 2015 έως 25 Φεβρουαρίου 2015.
Για την περίοδο από 10 Νοεμβρίου 2014 έως 31 Δεκεμβρίου 2014 έχουμε: 365–314=51 ημέρες.
Για την περίοδο από 1η Ιανουαρίου 2015 έως 25 Φεβρουαρίου 2015 έχουμε 56 ημέρες.
Άρα, για την περίοδο από 10 Νοεμβρίου 2014 έως 25 Φεβρουαρίου 2015 έχουμε συνολικά 51+56=107 τοκοφόρες ημέρες.

	Ι	**Φ**	**Μ**	**Α**	**Μ**	**Ι**	**Ι**	**Α**	**Σ**	**Ο**	**Ν**	**Δ**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337

4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	330
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Πίνακας 1.2 *Αριθμός τοκοφόρων ημερών*

Παράδειγμα 7

Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο €7.000 το οποίο μετά από 7 έτη έγινε €11.410;

Λύση

Εδώ μας δίνεται το νέο κεφάλαιο $\left(\tilde{K}\right)$το οποίο δημιουργήθηκε, δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο συν τους τόκους $\left(\tilde{K} = K + I\right)$, το αρχικό κεφάλαιο και ο χρόνος τοκισμού και πρέπει να βρούμε το επιτόκιο.

Θα πάρουμε τον τύπο απλού τόκου και θα λύσουμε ως προς το επιτόκιο

$$\tilde{K} = K + I \Rightarrow$$

$$\tilde{K} = K + K \cdot n \cdot i \Rightarrow$$

$$\tilde{K} - K = K \cdot n \cdot i \Rightarrow$$

$$i = \frac{\tilde{K} - K}{K \cdot n}$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο στα δεδομένα του παραδείγματος:

$$i = \frac{\tilde{K} - K}{K \cdot n} \Rightarrow i = \frac{11.410 - 7.000}{7.000 \cdot 7} = 0,09$$

Δηλαδή το επιτόκιο είναι 9%.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε τον τόκο αφαιρώντας το αρχικό από το τελικό κεφάλαιο και να δουλέψουμε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8
Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο το οποίο διπλασιάστηκε σε 10 έτη;
Λύση
Το νέο κεφάλαιο είναι $\tilde{K} = 2K$. Γνωρίζουμε ότι στον απλό τόκο ισχύει:

$$\tilde{K} = K \cdot (1 + n \cdot i)$$

όπου $\tilde{K}$ αντικαθιστούμε το ίσο του $2K$

$$2K = K \cdot (1 + n \cdot i)$$

μπορούμε να διαγράψουμε το K από τα δύο μέλη, οπότε έχουμε

$$1 + n \cdot i = 2 \Rightarrow n \cdot i = 1 \Rightarrow i = \frac{1}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Παρατηρούμε ότι το ερώτημα είναι ανεξάρτητο του κεφαλαίου. Δηλαδή, οποιοδήποτε κεφάλαιο τοκίζεται με απλό τόκο, χρειάζεται επιτόκιο 10% προκειμένου να διπλασιαστεί σε 10 έτη.

Παράδειγμα 9
Με ποιο επιτόκιο τοκίστηκε ένα κεφάλαιο για 6 μήνες και έφερε τόκο ίσο με το 1/8 του κεφαλαίου αυτού;
Λύση
Ο τόκος είναι ίσος με το 1/8 του κεφαλαίου

$$I = \frac{1}{8}K$$

από την άλλη το κεφάλαιο τοκίζεται για 6 μήνες, άρα δίνει τόκο

$$I = K\frac{\mu}{12}i = K\frac{i}{2}$$

από τις δύο σχέσεις έχουμε

$$K\frac{i}{2} = \frac{1}{8}K \Rightarrow i = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Άρα, το επιτόκιο είναι 25%.

Παράδειγμα 10
Με ποιο επιτόκιο τοκίσθηκε κεφάλαιο €600 που μετά από 6 μήνες έγινε με τους τόκους του €618;
Λύση
Οι τόκοι του κεφαλαίου είναι

$$I = 618 - 600 = 18$$

αφού το κεφάλαιο τοκίστηκε για 6 μήνες θα έχουμε

$$I = K\frac{\mu}{12}i = 600\frac{6}{12}i = 300i$$

από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$300i = 18 \Rightarrow i = \frac{18}{300} = 0{,}06$$

Άρα, το επιτόκιο είναι 6%.

1.1.3. Εύρεση του χρόνου

Παράδειγμα 11.
Πόσα έτη πρέπει να τοκισθεί κεφάλαιο €5.000 με επιτόκιο 5% για να γίνει €7.250;
Λύση
Γνωρίζουμε το αρχικό και το τελικό κεφάλαιο από όπου βρίσκουμε τον τόκο

$$I = \tilde{K} - K = 7.250 - 5.000 = 2.250$$

από τον τύπο του απλού τόκου έχουμε

$$I = K \cdot n \cdot i \Rightarrow n = \frac{I}{K \cdot i}$$

αντικαθιστούμε τα δεδομένα του παραδείγματος και

$$n = \frac{I}{K \cdot i} = \frac{2.250}{5.000 \cdot 0,05} = 9$$

Συνεπώς το κεφάλαιο θα τοκισθεί για 9 έτη.

Παράδειγμα 12.
Πόσα έτη πρέπει να τοκισθεί κεφάλαιο με επιτόκιο 5% έτσι ώστε να τριπλασιαστεί;
Λύση
Αν το αρχικό κεφάλαιο είναι K το τελικό κεφάλαιο θα είναι $\tilde{K} = 3K$ από όπου βρίσκουμε τον τόκο

$$I = \tilde{K} - K = 3K - K = 2K$$

από τον τύπο του απλού τόκου έχουμε

$$I = K \cdot n \cdot i \Rightarrow n = \frac{I}{K \cdot i} = \frac{2 \cdot K}{K \cdot i} = \frac{2}{i}$$

συνεπώς ο αριθμός των ετών που απαιτούνται για τον τριπλασιασμό ενός κεφαλαίου είναι

$$n = \frac{2}{i}$$

άρα, με επιτόκιο 5% χρειάζονται

$$n = \frac{2}{0.05} = 40 \text{ έτη.}$$

Γενικά, για να γίνει το τελικό κεφάλαιο λ φορές το αρχικό, απαιτούνται:

$$n = \frac{\lambda - 1}{i} \text{ έτη}$$

(αυτό προκύπτει αν εργαστούμε ανάλογα με την παραπάνω περίπτωση του τριπλασιασμού).

1.1.4 Προβλήματα απλού τόκου με πολλά κεφάλαια

Θα ασχοληθούμε με προβλήματα απλού τόκου τα οποία εμπλέκουν πολλά κεφάλαια.

Παράδειγμα 13
Κεφάλαια €4.000, €7.700, €9.500 και €10.600 ευρώ τοκίστηκαν για 64, 79, 108 και 128 ημέρες αντίστοιχα με κοινό επιτόκιο 7%. Να βρεθεί ο συνολικός τόκος.
Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned} K_1 &= 4.000 \quad & \nu_1 &= 64 \\ K_2 &= 7.700 \quad & \nu_2 &= 79 \\ K_3 &= 9.500 \quad & \nu_3 &= 108 \\ K_4 &= 10.600 \quad & \nu_4 &= 128 \end{aligned}$$

για τον συνολικό τόκο ισχύει

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \\ &= K_1 \frac{\nu_1 i}{360} + K_2 \frac{\nu_2 i}{360} + K_3 \frac{\nu_3 i}{360} + K_4 \frac{\nu_4 i}{360} = \\ &= \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3 + K_4\nu_4\right)\frac{i}{360} \end{aligned}$$

έχουμε

$$K_1\nu_1 = 256.000$$
$$K_2\nu_2 = 608.300$$
$$K_3\nu_3 = 1.026.000$$
$$K_4\nu_4 = 1.356.800$$
$$K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3 + K_4\nu_4 = 3.247.100$$

άρα

$$I = 3.247.100\frac{0,07}{360} = 631,38$$

Ο συνολικός τόκος από τα τέσσερα κεφάλαια είναι €631,38.

Παράδειγμα 14

Τοκίστηκαν τα εξής κεφάλαια:

α) €500 από 1η Ιανουαρίου 2015 έως 9 Φεβρουαρίου 2015.

β) € 700 από 20 Μαρτίου 2015 έως 10 Απριλίου 2015.

γ) € 1000 από 1η Ιανουαρίου 2015 έως 31 Μαρτίου 2015.

Να βρεθεί ο συνολικός τόκος, αν το επιτόκιο είναι 7% και το έτος μικτό.

Λύση

Από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών (1.2) υπολογίζουμε πόσες μέρες τοκίστηκε το κάθε κεφάλαιο:

$$K_1 = 500, \quad 01/1\text{-}09/2, \quad \nu_1 = 40 - 1 = 39,$$
$$K_2 = 700, \quad 20/3\text{-}10/4, \quad \nu_2 = 100 - 79 = 21,$$
$$K_3 = 1.000, \quad 01/1\text{-}31/3, \quad \nu_3 = 90 - 1 = 89,$$

ο συνολικός τόκος και πάλι είναι:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = K_1\frac{\nu_1 i}{360} + K_2\frac{\nu_2 i}{360} + K_3\frac{\nu_3 i}{360} =$$
$$= \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)\frac{i}{360}$$

έχουμε

$$K_1\nu_1 = 19.500$$
$$K_2\nu_2 = 14.700$$
$$K_3\nu_3 = 89.000$$
$$K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3 = 123.200$$

Επομένως, ο συνολικός τόκος είναι:

$$I = 123.200\frac{0,07}{360} = 23,95$$

Παράδειγμα 15

Κάποιος τοκίζει το 1/3 του κεφαλαίου του με επιτόκιο 6% και το υπόλοιπο με 9% και εισπράττει από το δεύτερο μέρος €1.120 περισσότερο ετήσιο τόκο από ότι εισπράττει από το πρώτο μέρος. Ποιο είναι το συνολικό κεφάλαιο που τόκισε;

Λύση

Θα πρέπει πρώτα να επιμερίσουμε το αρχικό κεφάλαιο σε δύο μικρότερα κεφάλαια, έτσι ώστε:

$$K_1 + K_2 = K$$

κάθε κεφάλαιο να σχετίζεται με το αρχικό ως εξής:

$$K_1 = \frac{1}{3}K, \quad K_2 = K - K_1 = K - \frac{K}{3} = \frac{2}{3}K$$

Επίσης, λαμβάνουμε υπόψη ότι «εισπράττει από το δεύτερο μέρος €1.120 περισσότερο ετήσιο τόκο από ότι εισπράττει από το πρώτο μέρος»,

δηλαδή

$$I_2 = I_1 + 1.120 \Rightarrow$$
$$K_2 i_2 = K_1 i_1 + 1.120 \Rightarrow$$
$$\frac{2}{3}K \cdot 0,09 - \frac{1}{3}K \cdot 0,06 = 1.120 \Rightarrow$$
$$0,04K = 1.120 \Rightarrow$$
$$K = 28.000$$

Παράδειγμα 16

Τοκίζουμε το 1/6 του κεφαλαίου μας με 9% για 6 μήνες, το 1/12 με 6% για 6 μήνες και το υπόλοιπο με 8% για 1 χρόνο. Αν ο συνολικός τόκος που πήραμε είναι €1.344, ποιο είναι το αρχικό μας κεφάλαιο;

Λύση

Θα πρέπει πρώτα να επιμερίσουμε το κεφάλαιο στα τρία μικρότερα κεφάλαια, έτσι ώστε

$$K_1 + K_2 + K_3 = K$$

κάθε κεφάλαιο να σχετίζεται με το αρχικό ως εξής:

$$K_1 = \frac{1}{6}K, \quad K_2 = \frac{1}{12}K,$$
$$K_3 = K - K_1 - K_2 = K - \frac{K}{6} - \frac{K}{12} = K\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{4}K$$

ο συνολικός τόκος είναι

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = K_1 \frac{\mu_1 i_1}{12} + K_2 \frac{\mu_2 i_2}{12} + K_3 \frac{\mu_3 i_3}{12} =$$
$$= \frac{K_1\mu_1 i_1 + K_2\mu_2 i_2 + K_3\mu_3 i_3}{12}$$

από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$K_1 = \frac{1}{6}K, \quad \mu_1 = 6, \quad i_1 = 0.09 \quad \to K_1\mu_1 i_1 = 0.09K$$
$$K_2 = \frac{1}{12}K, \quad \mu_2 = 6, \quad i_2 = 0.06 \to K_2\mu_2 i_2 = 0.03K$$
$$K_3 = \frac{3}{4}K, \quad \mu_3 = 12, \quad i_3 = 0.08 \to K_3\mu_3 i_3 = 0.72K$$

δηλαδή

$$K_1\mu_1 i_1 + K_2\mu_2 i_2 + K_3\mu_3 i_3 = 0,84 \cdot K$$

Αφού ο συνολικός τόκος για το αρχικό κεφάλαιο είναι €1450, έχουμε

$$\frac{0,84K}{12} = 1.344 \Rightarrow K = 19.200$$

Παράδειγμα 17

Δύο κεφάλαια τοκίστηκαν επί 9 μήνες, το πρώτο με επιτόκιο 6% και το δεύτερο με 7% και έδωσαν συνολικό τόκο €4.500. Αν ο τόκος του β' κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του τόκου του α' κεφαλαίου κατά €1.800, να βρεθούν τα κεφάλαια που τοκίστηκαν.

Λύση

Έστω K_1 και K_2 τα κεφάλαια τα οποία τοκίστηκαν. Ο τόκος του κάθε κεφαλαίου είναι:

$$I_1 = \frac{K_1\mu_1 i_1}{12} = \frac{K_1 \; 9 \; 0,06}{12} = 0,045K_1$$
$$I_2 = \frac{K_2\mu_2 i_2}{12} = \frac{K_1 \; 9 \; 0,07}{12} = 0,0525K_2$$

Έχουμε ότι τα δύο κεφάλαια *«έδωσαν συνολικό τόκο € 4.500»,* δηλαδή

$$I_1 + I_2 = 4.500$$

Επίσης έχουμε ότι *«ο τόκος του β' κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του τόκου του α' κεφαλαίου κατά €1.800»*, δηλαδή

$$I_2 = 1.800 + I_1$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε τον τόκο του κάθε κεφαλαίου

$$I_1 + 1.800 + I_1 = 4.500 \Rightarrow 2I_1 = 2.700 \Rightarrow I_1 = 1.350$$

και $I_2 = 3.150$.

Από τις σχέσεις τόκου κεφαλαίου βρίσκουμε τα κεφάλαια

$$1.350 = 0,045K_1 \Rightarrow K_1 = 30.000$$

$$3.150 = 0,0525K_2 \Rightarrow K_2 = 60.000$$

Παράδειγμα 18

Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατά €50. Το μεγαλύτερο τοκίστηκε με επιτόκιο 6% και το μικρότερο με 8%. Αν στα κεφάλαια αυτά προστεθούν αντίστοιχα και οι ετήσιοι τόκοι προκύπτουν ίσα ποσά. Ποια ήταν τα κεφάλαια αυτά;

Λύση

Ας ονομάσουμε K_1 το μεγαλύτερο και K_2 το μικρότερο κεφάλαιο αντίστοιχα. Εφόσον διαφέρουν κατά €50 ισχύει:

$$K_1 - K_2 = 50$$

Από το γεγονός ότι αν στα δύο κεφάλαια προστεθούν οι αντίστοιχοι ετήσιοι τόκοι προκύπτουν ίσα νέα κεφάλαια έχουμε:

$$\begin{aligned}
&K_1(1+i_1) = K_2(1+i_2) \Rightarrow \\
&(K_2+50)(1+i_1) = K_2(1+i_2) \Rightarrow \\
&K_2(1+i_1) + 50(1+i_1) = K_2(1+i_2) \Rightarrow \\
&K_2(1+i_1) - K_2(1+i_2) = -50(1+i_1) \Rightarrow \\
&K_2(i_1 - i_2) = -50(1+i_1) \Rightarrow \\
&K_2 = 50\frac{1+i_1}{i_2 - i_1} = 50\frac{1,06}{0,02} = 2.650
\end{aligned}$$

συνεπώς $K_1 = 2.700$.

Παράδειγμα 19

Ένα κεφάλαιο K τοκίζεται για 80 μέρες με επιτόκιο 9% ενώ τριπλάσιο κεφάλαιο τοκίζεται για 6 μήνες με επιτόκιο i. Ο συνολικός τόκος ανέρχεται στο 1/5 του αρχικού κεφαλαίου K. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο τοκίζεται το δεύτερο κεφάλαιο. (Έτος Μικτό.)

Λύση

Έστω K το πρώτο κεφάλαιο, ο τόκος του είναι:

$$K\frac{\nu i_1}{360} = K\frac{80 \cdot 0,09}{360} = 0,02K$$

Το δεύτερο κεφάλαιο θα είναι $3K$ και ο τόκος του

$$3K\frac{\mu \cdot i_2}{12} = 3K\frac{6 \cdot i_2}{12} = \frac{3}{2}K \cdot i_2$$

Τα άθροισμα των τόκων είναι ίσο με το 1/5 του πρώτου κεφαλαίου, δηλαδή:

$$0,02K + \frac{3}{2}K \cdot i_2 = \frac{1}{5}K \Rightarrow$$

$$0,02 + \frac{3}{2}i_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow i_2 = 0,12$$

Άρα, το δεύτερο κεφάλαιο τοκίζεται με επιτόκιο 12%.

Παράδειγμα 20

Κεφάλαια €4.000 και €6.000 τοκίστηκαν με δύο διαφορετικά επιτόκια και έδωσαν συνολικό ετήσιο τόκο €620. Αν ο ετήσιος τόκος του πρώτου κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος του ετήσιου τόκου του δεύτερου κατά €20, με ποια επιτόκια τοκίστηκαν τα πιο πάνω κεφάλαια;

Λύση

Έστω $K_1 = 4.000$, $K_2 = 6.000$ και $i_1,\ i_2$ τα αντίστοιχα επιτόκια. Αν $I_1,\ I_2$ οι αντίστοιχοι ετήσιοι τόκοι έχουμε

$$I_1 + I_2 = 620$$
$$I_1 - I_2 = 20$$

Προσθέτουμε κατά μέλη το σύστημα αυτό και βρίσκουμε ότι:

$$I_1 = 320,\ I_2 = 300$$

από τον τύπο του απλού τόκου έχουμε

$$I_1 = K_1 \cdot i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{I_1}{K_1} = \frac{320}{4.000} = 0,08$$

Άρα το πρώτο κεφάλαιο τοκίστηκε με επιτόκιο 8%, όμοια βρίσκουμε ότι το δεύτερο κεφάλαιο τοκίστηκε με επιτόκιο 5%.

Παράδειγμα 21

Δύο κεφάλαια που διαφέρουν κατά €2.000 τοκίζονται και τα δύο μαζί με επιτόκιο 10% και δίνουν στον ίδιο χρόνο τόκους που διαφέρουν κατά €100. Να βρεθεί ο χρόνος (σε μήνες).

Λύση

Επειδή τα κεφάλαια διαφέρουν κατά €2.000, έχουμε:

$$K_1 - K_2 = 2.000$$

όπου K_1 είναι το μεγαλύτερο από τα δύο κεφάλαια.

Αφού το επιτόκιο και ο χρόνος είναι ίδια, το μεγαλύτερο κεφάλαιο θα δώσει και μεγαλύτερο τόκο και η διαφορά των τόκων είναι €100, άρα

$$K_1 \frac{\mu}{12} i - K_2 \frac{\mu}{12} i = 100 \Rightarrow$$
$$\left(K_1 - K_2\right)\frac{\mu}{12} i = 100 \Rightarrow 2.000\frac{\mu}{12}0,1 = 100 \Rightarrow \mu = 6$$

Άρα, τα κεφάλαια τοκίζονται για 6 μήνες.

Παράδειγμα 22

Τόκισε κάποιος τα 2/5 του κεφαλαίου του με ετήσιο επιτόκιο 6% και το υπόλοιπο με 8% για ένα έτος. Η διαφορά των τόκων είναι €360. Ποιο ήταν το συνολικό κεφάλαιο που τοκίστηκε;

Λύση

Η διαφορά των ετήσιων τόκων είναι €360, συνεπώς:

$$\frac{3}{5}K \cdot 0,08 - \frac{2}{5}K \cdot 0,06 = 360 \Rightarrow$$
$$\frac{K}{5}(0,24 - 0,12) = 360 \Rightarrow K = 15.000$$

Παράδειγμα 23

Πατέρας ο οποίος έχει τρία παιδιά με ηλικίες 11, 13 και 16 ετών έχει στη διάθεσή του το ποσό των €62.000 και επιθυμεί να τους το μοιράσει και να καταθέσει στην τράπεζα το μερίδιο του καθενός με ετήσιο επιτόκιο 10%, έτσι ώστε όταν κάθε παιδί γίνει 21 ετών να εισπράξει το ίδιο ποσό. Να βρεθούν τα μερίδια που θα κατατεθούν στην τράπεζα σήμερα για κάθε παιδί.

Λύση

Εδώ έχουμε τρία κεφάλαια (μερίδια)

- K_1 για το παιδί ηλικίας 11 ετών το ποσό αυτό θα τοκιστεί για $n_1 = 10$ έτη
- K_2 για το παιδί ηλικίας 13 ετών το ποσό αυτό θα τοκισθεί για $n_1 = 8$ έτη

- K_3 για το παιδί ηλικίας 16 ετών το ποσό αυτό θα τοκισθεί για $n_1 = 5$ έτη

και πρέπει να αθροίζουν σε €62.000. Δηλαδή πρέπει

$$K_1 + K_2 + K_3 = 62.000 \tag{1}$$

Τα κεφάλαια τοκίζονται με το ίδιο επιτόκιο και για κάθε παιδί όταν θα γίνει 21 ετών γίνονται:

$$\tilde{K}_1 = K_1(1+n_1 \cdot i) = 2K_1$$

$$\tilde{K}_2 = K_2(1+n_2 \cdot i) = 1{,}8K_2$$

$$\tilde{K}_3 = K_3(1+n_3 \cdot i) = 1{,}5K_3$$

Τα τελικά κεφάλαια πρέπει να είναι ίσα δηλαδή

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2 = \tilde{K}_3$$

οπότε έχουμε

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2 \Rightarrow 2K_1 = 1{,}8K_2 \Rightarrow K_1 = 0{,}9K_2$$

$$\tilde{K}_2 = \tilde{K}_3 \Rightarrow 1{,}8K_2 = 1{,}5K_3 \Rightarrow K_3 = 1{,}2K_2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1)

$$0{,}9K_2 + K_2 + 1{,}2K_2 = 62.000 \Rightarrow$$

$$3{,}1K_2 = 62.000 \Rightarrow K_2 = 20.000$$

συνεπώς

$$K_1 = 18.000$$

$$K_3 = 24.000$$

Παράδειγμα 24

Τρία κεφάλαια K1, K2, K3 είναι ανάλογα των αριθμών 3, 9, 8. Το πρώτο τοκίζεται για 3 μήνες με επιτόκιο 6%, το δεύτερο για 4 μήνες με επιτόκιο 8% και το τρίτο για 6 μήνες με 5% και δίνουν συνολικό τόκο €2.425. Να βρεθούν τα κεφάλαια που τοκίστηκαν.

Λύση

Αφού τα κεφάλαια είναι ανάλογα των αριθμών 3, 9, 8 ισχύει:

$$\frac{K_1}{3} = \frac{K_2}{9} = \frac{K_3}{8} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 3\lambda \\ K_2 = 9\lambda \\ K_3 = 8\lambda \end{cases}$$

Ο συνολικός τόκος είναι €2.425:

$$K_1 \frac{3}{12} 0{,}06 + K_2 \frac{4}{12} 0{,}08 + K_3 \frac{6}{12} 0{,}05 = 2.425 \Rightarrow$$

$$0{,}045\lambda + 0{,}24\lambda + 0{,}2\lambda = 2.425 \Rightarrow$$

$$0{,}485\lambda = 2.425$$

$$\lambda = 5.000$$

Τα κεφάλαια είναι:

$$K_1 = 15.000$$

$$K_2 = 45.000$$

$$K_3 = 40.000$$

1.1.5. Κεφάλαια που τοκίζονται διαδοχικά

Παράδειγμα 25

Καταθέτουμε κεφάλαιο K για 3 μήνες με επιτόκιο 8%. Μετά το τέλος των 3 μηνών το επιτόκιο αλλάζει και γίνεται 10%. Αφήνουμε το κεφάλαιο για άλλους 6 μήνες. Αν τελικά πήραμε κεφάλαιο και τόκους μαζί €12.852, ποιο είναι το ποσό που τοκίσαμε;

Λύση

Το αρχικό κεφάλαιο τοκίζεται σε δύο φάσεις. Πρώτα για 3 μήνες και στη συνέχεια το κεφάλαιο που δημιουργείται για άλλους 6 μήνες. Έστω K_0 το αρχικό κεφάλαιο, K_1 το νέο κεφάλαιο που δημιουργείται μετά από 3 μήνες και τέλος έστω K_2 το τελικό κεφάλαιο αφού περάσουν άλλοι 6 μήνες.

Σχηματικά

$$K_0 \xrightarrow[i_1=0,08]{\mu_1=3} K_1 \xrightarrow[i_2=0,1]{\mu_2=6} K_2 = 12.852$$

Εφαρμόζουμε δύο φορές τον τύπο του απλού τόκου

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{\mu_1 i_1}{12}\right)$$

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{\mu_2 i_2}{12}\right)$$

Από εδώ μπορούμε να συνεχίσουμε με δύο τρόπους:

1ος τρόπος. Από τη δεύτερη σχέση γνωρίζουμε τα

$$K_2,\ \mu_2,\ i_2$$

άρα μπορούμε να βρούμε το K_1

$$12.852 = K_1\left(1+\frac{6\cdot 0,1}{12}\right)\Rightarrow$$

$$12.852 = K_1\ 1,05 \Rightarrow K_1 = 12852/1,05 = 12.240$$

στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{\mu_1 i_1}{12}\right)\Rightarrow$$

$$12.240 = K_0\left(1+\frac{3\cdot 0,08}{12}\right)\Rightarrow$$

$$12.240 = K_0\ 1,02 \Rightarrow K_0 = 12.000$$

2ος τρόπος. Αντικαθιστούμε την πρώτη στη δεύτερη σχέση και έχουμε

$$K_2 = K_0\left(1+\frac{\mu_1\cdot i_1}{12}\right)\left(1+\frac{\mu_2\cdot i_2}{12}\right) =$$

$$= K_0\left(1+\frac{\mu_1\cdot i_1}{12}+\frac{\mu_2\cdot i_2}{12}+\frac{\mu_1\cdot i_1}{12}\frac{\mu_2\cdot i_2}{12}\right) =$$

$$= K_0\left(1+0,02+0,05+0,001\right)\Rightarrow$$

$$K_2 = K_0\ 1,071\Rightarrow$$

$$K_0 = \frac{K_2}{1,071} = \frac{12.852}{1,071} = 12.000$$

Παράδειγμα 26

Τόκισε κάποιος, με απλό τόκο, €14.400. Το επιτόκιο κατάθεσης ήταν στην αρχή 5% άλλαξε όμως μετά από μερικές ημέρες (ν) και έγινε 4%. Να βρεθεί ο αριθμός των ημερών (ν) από την αρχή της κατάθεσης μέχρι να αλλάξει το επιτόκιο , αν είναι γνωστό ότι το σύνολο των τόκων στο τέλος του έτους ήταν €617,4. Έτος μικτό.

Λύση

Η συνολική περίοδος που τοκίστηκε το κεφάλαιο είναι ένα έτος. Τις πρώτες έστω $\nu_1 = \nu$ ημέρες τοκίστηκε με επιτόκιο $i_1 = 0,05$, ενώ τις επόμενες $\nu_2 = 360-\nu$ ημέρες τοκίστηκε με επιτόκιο $i_2 = 0,04$.

Επίσης γνωρίζουμε το αρχικό κεφάλαιο

$K_0 = 14.400$ και το συνολικό τόκο $I = 617,4$.

Τα δεδομένα αυτά περιγράφονται σχηματικά παρακάτω

$$K_0 = 14.400 \xrightarrow[i_1=0,05]{\nu_1=\nu} K_1 \xrightarrow[i_2=0,04]{\nu_2=360-\nu} K_2 = K_0 + 617,4$$

Εφαρμόζουμε δύο (2) φορές τον τύπο του απλού τόκου

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{\nu_1 \cdot i_1}{360}\right), \quad K_2 = K_1\left(1+\frac{\nu_2 \cdot i_2}{360}\right)$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\begin{aligned} K_2 &= K_0\left(1+\frac{\nu_1 \cdot i_1}{360}\right)\left(1+\frac{\nu_2 \cdot i_2}{360}\right) = \\ &= K_0\left(1+\frac{\nu_1 \cdot i_1}{360}+\frac{\nu_2 \cdot i_2}{360}+\frac{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot i_1 \cdot i_2}{360^2}\right) = \\ &= K_0\left(1+\frac{\nu \cdot i_1}{360}+\frac{(360-\nu) \cdot i_2}{360}+\frac{\nu(360-\nu) i_1 \cdot i_2}{360^2}\right) = \\ &= K_0\left(1+\frac{\nu \cdot i_1}{360}+i_2-\frac{\nu \cdot i_2}{360}+\frac{\nu \cdot i_1 \cdot i_2}{360}-\frac{\nu^2 \cdot i_1 \cdot i_2}{360^2}\right) = \\ &= K_0\left(1+i_2+\nu\frac{i_1-i_2+i_1 \cdot i_2}{360}-\nu^2\frac{i_1 \cdot i_2}{360^2}\right) \end{aligned}$$

άρα

$$1+i_2+\nu\frac{i_1-i_2+i_1 \cdot i_2}{360}-\nu^2\frac{i_1 \cdot i_2}{360^2} = \frac{K_2}{K_0} \Rightarrow$$

$$\nu^2\frac{i_1 \cdot i_2}{360^2}+\nu\frac{i_2-i_1-i_1 \cdot i_2}{360}+\frac{K_2}{K_0}-1-i_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\nu^2\frac{0.002}{360^2}-\nu\frac{0.012}{360}+0,002875 = 0$$

Λύνουμε την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση και βρίσκουμε λύσεις $\nu_1 = 90$ και $\nu_2 = 2.070$ μέρες. Προφανώς δεκτή είναι η πρώτη λύση άρα το αρχικό κεφάλαιο τοκίζεται με επιτόκιο 5% και για τις υπόλοιπες 270 μέρες με επιτόκιο 4%.

Παράδειγμα 27

Δυο κεφάλαια, από €1.000 το καθένα, τοκίστηκαν με κοινό επιτόκιο 8%. Έως σήμερα, το πρώτο έδωσε τόκο €70 και το δεύτερο €30. Σε πόσο χρόνο (ημέρες) από σήμερα, ο συνολικός τόκος του πρώτου κεφαλαίου θα είναι διπλάσιος του συνολικού τόκου του δεύτερου κεφαλαίου;

Λύση

Εδώ έχουμε δύο κεφάλαια τα οποία τοκίζονται σε δύο φάσεις, η πρώτη φάση τοκισμού δεν γνωρίζουμε αν άρχισε μαζί για τα δύο κεφάλαια αλλά η δεύτερη φάση τοκισμού άρχισε μαζί και διήρκεσε ίδιο χρόνο ν ημέρες. Έχουμε λοιπόν

$$K_1 \xrightarrow[\nu_1]{} K_1 + I_1 \xrightarrow[\nu]{} K_1 + \tilde{I}_1$$

$$K_2 \xrightarrow[\nu_2]{} K_2 + I_2 \xrightarrow[\nu]{} K_2 + \tilde{I}_2$$

όπου $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$ οι συνολικοί τόκοι για κάθε κεφάλαιο, και I_1, I_2 οι τόκοι της πρώτης φάσης τοκισμού. Εφαρμόζουμε τον τύπο του απλού τόκου για την πρώτη φάση τοκισμού

$$I_1 = \frac{K_1\nu_1 i_1}{360} \Rightarrow \nu_1 = \frac{360 I_1}{K_1 i_1} = \frac{360 \cdot 70}{80} = 315$$

$$I_2 = \frac{K_2\nu_2 i_2}{360} \Rightarrow \nu_2 = \frac{360 I_2}{K_2 i_2} = \frac{360 \cdot 30}{80} = 135$$

Θέλουμε *«ο συνολικός τόκος του πρώτου κεφαλαίου να είναι διπλάσιος του συνολικού τόκου του δεύτερου κεφαλαίου»*, δηλαδή

$$\tilde{I}_1 = 2\tilde{I}_2$$

τότε το πρώτο κεφάλαιο θα έχει τοκιστεί συνολικά $\nu_1 + \nu$ ημέρες και το δεύτερο $\nu_2 + \nu$ ημέρες, συνεπώς

$$K\frac{\nu_1 + \nu}{360}\ i_1 = 2K\frac{\nu_2 + \nu}{360}\ i_2 \Rightarrow$$

$$\nu_1 + \nu = 2\nu_2 + 2\nu \Rightarrow \nu = \nu_1 - 2\nu_2 = 45$$

Δηλαδή θα χρειαστεί να τοκιστούν ακόμα 45 ημέρες από σήμερα.

Παράδειγμα 28

Κεφάλαιο *K* τοκίσθηκε για 120 ημέρες και έγινε με τους τόκους του €21.000. Το ποσό αυτό τοκίσθηκε στη συνέχεια με το ίδιο επιτόκιο για 90 ημέρες και έγινε μαζί με τους τόκους του €21.991,2. Να βρεθεί το επιτόκιο και το αρχικό κεφάλαιο *K* (έτος εμπορικό).

Λύση

Πάλι εδώ έχουμε ένα κεφάλαιο το οποίο τοκίζεται σε δύο φάσεις, στην αρχή για 120 ημέρες και στη συνέχεια για 80 ημέρες. Τα δεδομένα της άσκησης φαίνονται παρακάτω

$$K_0 \xrightarrow[i]{\nu_1=120} K_1 = 21.560 \xrightarrow[i]{\nu_2=90} K_2 = 22.900$$

και

$$K_1 = K_0\left(1 + \frac{\nu_1 i}{360}\right), \quad K_2 = K_1\left(1 + \frac{\nu_2 i}{360}\right)$$

Στη δεύτερη εξίσωση το μόνο άγνωστο μέγεθος είναι το επιτόκιο, λύνουμε ως προς αυτό:

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(1 + \frac{\nu_2 \cdot i}{360}\right) \Rightarrow = \frac{\nu_2 \cdot i}{360} \Rightarrow i = \frac{360}{\nu_2}\left(\frac{K_2}{K_1} - 1\right) \Rightarrow$$

$$i = \frac{360}{90}\left(\frac{21.991,2}{21.560} - 1\right) = 4 \cdot 0,02 = 0,08$$

Άρα το κοινό επιτόκιο είναι 8%.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το αρχικό κεφάλαιο:

$$K_1 = K_0 \Rightarrow K_0 = \frac{K_1}{\left(1 + \frac{\nu_1 i}{360}\right)} \Rightarrow$$

$$K_0 = \frac{21.560}{1 + \frac{120 \cdot 0.08}{360}} = \frac{21.560}{1.0267} = 21.000$$

Άρα το ζητούμενο αρχικό κεφάλαιο είναι € 21.000.

Παράδειγμα 29

Μια επιχείρηση δανείζει για 240 μέρες ένα ποσό €4.600 με μηνιαίο επιτόκιο 6% και μετά το κεφάλαιο και τον τόκο που πήρε, τα καταθέτει σε μια Τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο 8%. Μετά από πόσες μέρες θα έχει δυνατότητα να αποσύρει από την τράπεζα, όποια στιγμή θέλει, ποσό € 7.200;

Λύση

Οι 240 ημέρες αντιστοιχούν σε 8 μήνες έτσι τα δεδομένα της άσκησης παριστάνονται σχηματικά:

$$K_0 = 4.600 \xrightarrow[i_1=0,06]{\nu_1=240} K_1 \xrightarrow[i_2=0,08]{\nu_2} K_2 \geq 7.200$$

Ισχύει $K_1 = K_0(1 + \mu_1 \cdot i_1)$ από όπου υπολογίζουμε το νέο κεφάλαιο K_1:

$$K_1 = K_0(1 + \mu_1 i_1) = 4.600(1 + 8 \cdot 0,06)$$

$$= 4.600 \cdot 1,48 = 6.808$$

Για τη δεύτερη φάση έχουμε

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{\nu_2 i}{360}\right) \Rightarrow = \frac{\nu_2 i}{360} \Rightarrow \nu_2 = \left(\frac{K_2}{K_1}-1\right)\frac{360}{0,09} \Rightarrow$$
$$\nu_2 = \left(\frac{7.200}{6.808}-1\right)4.000 = 230$$

Τελικά, προκειμένου να δημιουργηθεί απόθεμα €7.200 ευρώ, θα χρειαστεί να τοκισθεί το νέο ποσό για επιπλέον 230 ημέρες.

1.1.6. Μέσο επιτόκιο

Έστω δύο κεφάλαια K_1 και K_2 τα οποία τοκίζονται για ν_1 και ν_2 ημέρες και με επιτόκια i_1 και i_2 αντίστοιχα. Αυτά δίνουν συνολικό τόκο

$$I = \frac{K_1\nu_1 i_1}{365} + \frac{K_2\nu_2 i_2}{365}$$

Αν τα ίδια κεφάλαια K_1 και K_2 τοκισθούν και πάλι για ν_1 και ν_2 ημέρες αντίστοιχα αλλά με κοινό επιτόκιο i, τότε ο τόκος που δίνουν είναι

$$I = \frac{K_1\nu_1 i}{365} + \frac{K_2\nu_2 i}{365}$$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν γνωρίζουμε τα K_1, K_2, ν_1, ν_2 και i_1, i_2 να βρούμε το κοινό επιτόκιο το οποίο θα δημιουργούσε τον ίδιο τόκο. Το επιτόκιο αυτό καλείται μέσο επιτόκιο.

Είναι προφανές ότι το μέσο επιτόκιο δεν ξεπερνά το μεγαλύτερο από τα δύο επιτόκια και είναι μεγαλύτερο από το μικρότερο από τα δύο επιτόκια (βρίσκετε δηλαδή ανάμεσα τους $i_1 < i < i_2$ αν $i_1 < i_2$).

Για να βρούμε το μέσο επιτόκιο των δύο κεφαλαίων

$$\frac{K_1\nu_1 i}{365} + \frac{K_2\nu_2 i}{365} = \frac{K_1\nu_1 i_1}{365} + \frac{K_2\nu_2 i_2}{365} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2\right)i}{365} = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2}{365} \Rightarrow$$

$$\left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2\right)i = K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2 \Rightarrow$$

$$i = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2}{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε για m κεφάλαια

$$K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_m$$

τα οποία τοκίζονται για

$$\nu_1\ ,\ \nu_2\ ,\ \ldots\ ,\ \nu_m$$

ημέρες με αντίστοιχα επιτόκια

$$i_1\ ,\ i_2\ ,\ \ldots\ ,\ i_m$$

τότε το μέσο επιτόκιο δίνεται από τον τύπο

$$i = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2 + \cdots + K_m\nu_m i_m}{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_m\nu_m}$$

ή

$$i = \frac{\sum_{j=1}^{m} K_j\nu_j i_j}{\sum_{j=1}^{m} K_j\nu_j}$$

Είναι φανερό ότι ο ίδιος τύπος ισχύει αν ο χρόνος εκφράζεται σε μήνες ή έτη.

Παράδειγμα 30

Δίνονται δύο κεφάλαια $K_1 = 1.000$ και $K_2 = 3.000$ ευρώ τα οποία τοκίζονται για $\nu_1 = 120$ και $\nu_2 = 60$ ημέρες και με επιτόκια $i_1 = 0,09$ και $i_2 = 0,06$ αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

Λύση

Εφαρμόζουμε τα δεδομένα στον τύπο του μέσου επιτοκίου και έχουμε

$$i = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2}{K_1\nu_1 + K_2\nu_2} = \frac{1.000\cdot 120\cdot 0,09 + 3.000\cdot 60\cdot 0,06}{1.000\cdot 120 + 3.000\cdot 60} =$$

$$= \frac{21,6}{300} = 0,072$$

Δηλαδή το μέσο επιτόκιο είναι 7,2%.

Παράδειγμα 31

Κεφάλαια €1.000, €1.800 και €3.200 τοκίστηκαν αντίστοιχα επί 90, 150 και 200 ημέρες με αντίστοιχα επιτόκια 5%, 7%, 9%. Να υπολογιστεί το μέσο επιτόκιο. Έτος μικτό.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο του μέσου επιτοκίου

$$i = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2 + K_3\nu_3 i_3}{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3} =$$

$$= \frac{1.000\cdot 90\cdot 0,05 + 1.800\cdot 150\cdot 0,07 + 3.200\cdot 200\cdot 0,09}{1.000\cdot 90 + 1.800\cdot 150 + 3.200\cdot 200}$$

$$= \frac{4,5 + 18,9 + 57,6}{90 + 270 + 640} = \frac{81}{1000} = 0,081$$

Δηλαδή το μέσο επιτόκιο είναι 8,1%.

Παράδειγμα 32

Κεφάλαια €1.000, €3.000 και €5.000 τοκίστηκαν με επιτόκια 5%, 8%, 10% αντίστοιχα για τον ίδιο αριθμό ημερών. Να υπολογιστεί το μέσο επιτόκιο.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο του μέσου επιτοκίου

$$i = \frac{K_1\nu i_1 + K_2\nu i_2 + K_3\nu i_3}{K_1\nu + K_2\nu + K_3\nu} = \frac{K_1 i_1 + K_2 i_2 + K_3 i_3}{K_1 + K_2 + K_3}$$

$$= \frac{2.000\cdot 0,05 + 3.000\cdot 0,08 + 5.000\cdot 0,1}{2.000 + 3.000 + 5.000}$$

$$= \frac{100 + 240 + 500}{10.000} = \frac{840}{10.000} = 0,084$$

Άρα το μέσο επιτόκιο είναι 8.4%.

Παράδειγμα 33

Κεφάλαια €2.000 και €3.000 τοκίστηκαν για 200 και 100 ημέρες αντίστοιχα. Αν το μέσο επιτόκιο είναι 8% και το δεύτερο κεφάλαιο τοκίστηκε με επιτόκιο 12%, να υπολογιστεί το επιτόκιο με το οποίο τοκίστηκε το πρώτο κεφάλαιο.

Λύση

Παίρνουμε τον τύπο του μέσου επιτοκίου

$$i = \frac{K_1\nu_1 i_1 + K_2\nu_2 i_2}{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}$$

και λύνουμε ως προς i_1.

$$i=\frac{K_1\nu_1 i_1+K_2\nu_2 i_2}{K_1\nu_1+K_2\nu_2}\Rightarrow i\cdot\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2\right)=K_1\nu_1 i_1+K_2\nu_2 i_2\Rightarrow$$

$$K_1\nu_1 i_1=K_1\nu_1 i+K_2\nu_2 i-K_2\nu_2 i_2\Rightarrow i_1=\frac{K_1\nu_1 i+K_2\nu_2(i-i_2)}{K_1\nu_1}\Rightarrow$$

$$i_1=i+\frac{K_2\nu_2}{K_1\nu_1}(i-i_2)\Rightarrow i_1=0,08+\frac{3.000\cdot 100}{2.000\cdot 200}(0,08-0,12)=0,05$$

Άρα το επιτόκιο με το οποίο τοκίστηκε το πρώτο κεφάλαιο είναι 5%.

Παράδειγμα 34

Τρία κεφάλαια ανάλογα των αριθμών 3, 5 και 8 τοκίζονται για τον ίδιο αριθμό ημερών με επιτόκια 5%, 7% και 12% αντίστοιχα. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

Λύση

Αφού τα κεφάλαια είναι ανάλογα των αριθμών 3, 5 και 8 ισχύει:

$$\frac{K_1}{3}=\frac{K_2}{5}=\frac{K_3}{8}=\lambda\Rightarrow\begin{cases}K_1=3\lambda\\K_2=5\lambda\\K_3=8\lambda\end{cases}$$

αντικαθιστούμε στον τύπο μέσου επιτοκίου

$$i=\frac{K_1\nu i_1+K_2\nu i_2+K_3\nu i_3}{K_1\nu+K_2\nu+K_3\nu}=\frac{3\lambda i_1+5\lambda i_2+8\lambda i_3}{3\lambda+5\lambda+8\lambda}=$$

$$=\frac{3i_1+5i_2+8i_3}{3+5+8}=\frac{3\cdot 0,05+5\cdot 0,07+8\cdot 0,12}{16}\approx 0.09$$

Για περισσότερη θεωρία και λυμένα παραδείγματα δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

1.2 Ασκήσεις

1.2.1. Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Κεφάλαιο τοκίζεται για 8 μήνες και αυξάνει κατά τα 2/15 αυτού. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε ο τοκισμός;

Λύση

Ο τόκος είναι ίσος με το 2/15 του κεφαλαίου

$$I=\frac{2}{15}K.$$

Το κεφάλαιο τοκίζεται για 10 μήνες άρα δίνει τόκο

$$I=K\frac{\mu}{12}i=K\frac{8}{12}i=K\frac{2}{3}i$$

Από τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$K\frac{2}{3}i=\frac{2}{15}K\Rightarrow i=\frac{2}{15}\frac{3}{2}=\frac{1}{5}=20\%.$$

Άσκηση 2

Κάποιος τόκισε τα εξής κεφάλαια:

α) K_1= €1.000 από 23 Μαΐου μέχρι 22 Ιουλίου.

β) K_2 = €2.000, από 24 Ιουνίου μέχρι 28 Αυγούστου.
γ) K_3 = € 3.000 από 11 Μαΐου μέχρι 10 Ιουλίου.
Να βρεθεί ο συνολικός τόκος, αν το επιτόκιο είναι 5% και το έτος μικτό.

Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα:

K1=1.000, 23 Μαΐου – 22 Ιουλίου, ν1=203-143=60,
K2=2.000, 24 Ιουνίου – 28 Αυγούστου, ν2=240-175=65,
K3=3.000, 11 Μαΐου – 10 Ιουλίου, ν3=191-131=60

Ο συνολικός τόκος είναι:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = K_1 \frac{\nu_1 i}{360} + K_2 \frac{\nu_2 i}{360} + K_3 \frac{\nu_3 i}{360} =$$
$$= \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)\frac{0,05}{360} =$$
$$= \left(1.000 \cdot 60 + 2.000 \cdot 65 + 3.000 \cdot 60\right)\frac{0,05}{360} =$$
$$= \left(600 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 60\right)1.000\frac{0,05}{360} =$$
$$= 360 \cdot 10\frac{5}{360} = 50$$

Άσκηση 3

Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατά €500. Το μεγαλύτερο τοκίσθηκε με επιτόκιο 4% και το μικρότερο με επιτόκιο 5%. Αν στα κεφάλαια αυτά προστεθούν αντίστοιχα και οι ετήσιοι τόκοι τους, προκύπτουν ίσα κεφάλαια. Ζητείται να ευρεθούν τα αρχικά κεφάλαια.

Λύση

Έστω K_1, K_2 τα κεφάλαια με $K_1 < K_2$, τότε

$$K_2 - K_1 = 500$$

Αφού οι ετήσιοι τόκοι είναι ίσοι έχουμε:

$$K_2 + K_2 0,04 = K_1 + K_1 0,05 \Rightarrow$$
$$K_2 - K_1 = -K_2 0,04 + K_1 0,05 \Rightarrow$$
$$500 = -(500 + K_1)0,04 + K_1 0,05 \Rightarrow$$
$$500 + 20 = 0,01K_1 \Rightarrow$$
$$K_1 = 52.000$$

Άσκηση 4

Δύο κεφάλαια, €7.000 και €4.000 έχουν τοποθετηθεί με δύο διαφορετικά επιτόκια και έδωσαν μαζί σε ένα έτος, τόκο €750. Εάν ο τόκος του πρώτου κεφαλαίου είναι μικρότερος από τον τόκο του δευτέρου κεφαλαίου κατά €50, να βρεθούν τα επιτόκια με τα οποία τοκίσθηκε το κάθε κεφάλαιο.

Λύση

Έχουμε

$$I_1 + I_2 = 750$$

και

$$I_2 - I_1 = 50$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$I_1 = 350, \quad I_2 = 400$$

Καθώς

$$I_1 = K_1 i_1 = 350 \Rightarrow 7.000 i_1 = 350 \Rightarrow i_1 = \frac{1}{20} = 5\%.$$

$$I_2 = K_2 i_2 = 400 \Rightarrow 4.000 i_2 = 400 \Rightarrow i_2 = \frac{1}{10} = 10\%.$$

Άσκηση 5

Πατέρας ο οποίος έχει δυο παιδιά με ηλικίες *n* και *k* ετών έχει στη διάθεση του ποσό *K* και επιθυμεί να τους το μοιράσει και να καταθέσει στην τράπεζα το μερίδιο του καθενός με ετήσιο επιτόκιο 10% έτσι ώστε όταν κάθε παιδί γίνει 20 ετών να εισπράξει το ίδιο ποσό. Να βρεθούν τα μερίδια που θα κατατεθούν στην τράπεζα σήμερα για κάθε παιδί.

Λύση

Εδώ έχουμε τρία κεφάλαια (μερίδια)

K_1 για το παιδί ηλικίας n ετών το ποσό αυτό θα τοκιστεί για 20-n έτη

K_2 για το παιδί ηλικίας k ετών το ποσό αυτό θα τοκισθεί για 20-k έτη

και πρέπει να αθροίζουν σε *K*. Δηλαδή πρέπει

$$K_1 + K_2 = K$$

Τα κεφάλαια τοκίζονται με το ίδιο επιτόκιο και για κάθε παιδί όταν θα γίνει 20 ετών γίνονται:

$$\tilde{K}_1 = K_1\left(1+\left(20-n\right)i\right) = K_1\left(1+\left(20-n\right)0{,}1\right) = K_1\left(3-0{,}1n\right)$$

$$\tilde{K}_2 = K_2\left(1+\left(20-k\right)i\right) = K_2\left(1+\left(20-k\right)0{,}1\right) = K_2\left(3-0{,}1k\right)$$

Τα τελικά κεφάλαια πρέπει να είναι ίσα δηλαδή

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2 \Rightarrow K_1\left(3-0{,}1n\right) = K_2\left(3-0{,}1k\right) \Rightarrow$$

$$K_1\left(3-0{,}1n\right) = \left(K-K_1\right)\left(3-0{,}1k\right) \Rightarrow$$

$$K_1\left(6-0{,}1\left(n+k\right)\right) = K\left(3-0{,}1k\right) \Rightarrow$$

$$K_1 = K\frac{\left(3-0{,}1k\right)}{6-0{,}1\left(n+k\right)}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι αν τα παιδιά έχουν την ίδια ηλικία *n*=*k* θα μοιραστούν εξίσου το ποσό.

Αν για παράδειγμα το ένα παιδί είναι 10 ετών και το άλλο είναι 6 ετών, τότε το μεγαλύτερο θα πρέπει να πάρει

$$K_1 = K\frac{\left(3-0{,}1k\right)}{6-0{,}1\left(n+k\right)} = K\frac{\left(3-0{,}1\cdot 6\right)}{6-0{,}1\left(10+6\right)} = K\frac{2{,}4}{4{,}4} = 0{,}545K$$

Άσκηση 6

Πατέρας ο οποίος έχει τρία παιδιά, έχει στη διάθεση του ποσό *K* και επιθυμεί να τους το μοιράσει και να καταθέσει στην τράπεζα το μερίδιο του καθενός με ετήσιο επιτόκιο 10%, έτσι ώστε όταν κάθε παιδί γίνει 20 ετών να εισπράξει το ίδιο ποσό. Να βρεθούν τα μερίδια που θα κατατεθούν στην τράπεζα σήμερα για κάθε παιδί.

Λύση

Εδώ έχουμε τρία κεφάλαια (μερίδια)

K_1 για το παιδί ηλικίας n_1 ετών το ποσό αυτό θα τοκιστεί για $20-n_1$ έτη

K_2 για το παιδί ηλικίας n_2 ετών το ποσό αυτό θα τοκισθεί για $20-n_2$ έτη

K_3 για το παιδί ηλικίας n_3 ετών το ποσό αυτό θα τοκισθεί για $20-n_3$ έτη

και πρέπει να αθροίζουν σε *K*. Δηλαδή πρέπει

$$K_1 + K_2 + K_3 = K$$

Τα κεφάλαια τοκίζονται με το ίδιο επιτόκιο και για κάθε παιδί όταν θα γίνει 20 ετών γίνονται:

$$\tilde{K}_1 = K_1\left(1+\left(20-n_1\right)i\right) = K_1\left(1+\left(20-n_1\right)0{,}1\right) = K_1\left(3-0{,}1n_1\right)$$
$$\tilde{K}_2 = K_2\left(1+\left(20-n_2\right)i\right) = K_2\left(1+\left(20-n_2\right)0{,}1\right) = K_2\left(3-0{,}1n_2\right)$$
$$\tilde{K}_3 = K_3\left(1+\left(20-n_3\right)i\right) = K_3\left(1+\left(20-n_3\right)0{,}1\right) = K_3\left(3-0{,}1n_3\right)$$

Τα τελικά κεφάλαια πρέπει να είναι ίσα

$$\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2 = \tilde{K}_3 \Rightarrow$$
$$K_1\left(3-0{,}1n_1\right) = K_2\left(3-0{,}1n_2\right) = K_3\left(3-0{,}1n_3\right)$$

Εκφράζουμε τα K_2 και K_3 ως προς K_1

$$K_2 = K_1\frac{\left(3-0{,}1n_1\right)}{\left(3-0{,}1n_2\right)} \qquad K_3 = K_1\frac{\left(3-0{,}1n_1\right)}{\left(3-0{,}1n_3\right)}$$

Έχουμε

$$K_1 + K_2 + K_3 = K \Rightarrow$$
$$K_1 + K_1\frac{\left(3-0{,}1n_1\right)}{\left(3-0{,}1n_2\right)} + K_1\frac{\left(3-0{,}1n_1\right)}{\left(3-0{,}1n_3\right)} = K \Rightarrow$$
$$K_1\frac{\left(3-0{,}1n_2\right)\left(3-0{,}1n_3\right)+\left(3-0{,}1n_1\right)\left(6-0{,}1(n_2+n_3)\right)}{\left(3-0{,}1n_2\right)\left(3-0{,}1n_3\right)} = K \Rightarrow$$
$$K_1 = K\frac{\left(3-0{,}1n_2\right)\left(3-0{,}1n_3\right)}{\left(3-0{,}1n_2\right)\left(3-0{,}1n_3\right)+\left(3-0{,}1n_1\right)\left(6-0{,}1(n_2+n_3)\right)}$$

Άσκηση 7

Τρία κεφάλαια συνολικής αξίας €2.700 των οποίων οι αξίες, με την σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, τοκίζονται το πρώτο για 90 μέρες, το δεύτερο για 120 μέρες και το τρίτο για 150 μέρες. Αν το επιτόκιο είναι 10% και ο συνολικός τόκος που πήραμε είναι €95, να βρεθούν τα τρία κεφάλαια. Έτος Μικτό.

Λύση

Έστω $K_1 = K - \omega$, $K_2 = K$ και $K_3 = K + \omega$.

Επειδή το άθροισμα των τριών κεφαλαίων είναι €2.700 έχουμε:

$$K_1 + K_2 + K_3 = 2.700 \Rightarrow K - \omega + K + K + \omega = 2.700 \Rightarrow$$
$$3K = 2.700 \Rightarrow K = 900$$

Ο συνολικός τόκος είναι €95 δηλαδή:

$$I_{o\lambda} = 95 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 95 \Rightarrow \frac{K_1\cdot\nu_1\cdot i}{360} + \frac{K_2\cdot\nu_2\cdot i}{360} + \frac{K_3\cdot\nu_3\cdot i}{360} = 95 \Rightarrow$$
$$\frac{\left(K-\omega\right)\cdot\nu_1\cdot i}{360} + \frac{K\cdot\nu_2\cdot i}{360} + \frac{\left(K+\omega\right)\cdot\nu_3\cdot i}{360} = 95 \Rightarrow$$
$$\frac{\left(900-\omega\right)\cdot 90\cdot 0{,}1}{360} + \frac{900\cdot 120\cdot 0{,}1}{360} + \frac{\left(900+\omega\right)\cdot 150\cdot 0{,}1}{360} = 95 \Rightarrow$$
$$8.100 - 9\cdot\omega + 10.800 + 13.500 + 15\cdot\omega = 95\cdot 360$$
$$6\cdot\omega = 1.800 \Rightarrow \omega = 300$$

Άρα $K_1 = 600$, $K_2 = 900$ και $K_3 = 1.200$

Άσκηση 8

Τρία κεφάλαια τοκίζονται στον απλό τόκο, το πρώτο για 90 μέρες με επιτόκιο 8%, το δεύτερο για 120 μέρες με επιτόκιο 10% και το τρίτο για 100 μέρες με επιτόκιο 9%. Αν το μέσο επιτόκιο είναι 9,2%, τα τρία κεφάλαια, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και το γινόμενο των τριών κεφαλαίων ισούται με €216.000.000, να βρεθούν τα τρία κεφάλαια.

Λύση

Επειδή τα τρία κεφάλαια αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, ορίζουμε $K_1 = \frac{K}{\lambda}$, $K_2 = K$ και $K_3 = K \cdot \lambda$.

Επειδή το γινόμενο των τριών κεφαλαίων ισούται με €216.000.000, έχουμε:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 216.000.000 \Rightarrow \frac{K}{\lambda} \cdot K \cdot K \cdot \lambda = 216.000.000 \Rightarrow K^3 = 216.000.000$$

Άρα $K = 600$

Ο τύπος του μέσου επιτοκίου είναι:

$$X = \frac{K_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + K_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + K_3 \cdot v_3 \cdot i_3}{K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2 + K_3 \cdot v_3}$$

Κάνουμε αντικατάσταση και έχουμε:

$$X = \frac{K_1 \cdot v_1 \cdot i_1 + K_2 \cdot v_2 \cdot i_2 + K_3 \cdot v_3 \cdot i_3}{K_1 \cdot v_1 + K_2 \cdot v_2 + K_3 \cdot v_3} \Rightarrow$$

$$0,092 = \frac{\frac{600}{\lambda} \cdot 90 \cdot 0,08 + 600 \cdot 120 \cdot 0,1 + 600 \cdot \lambda \cdot 100 \cdot 0,09}{\frac{600}{\lambda} \cdot 90 + 600 \cdot 120 + 600 \cdot \lambda \cdot 100} \Rightarrow$$

$$0,092 = \frac{\frac{4.320}{\lambda} + 7.200 + 5.400 \cdot \lambda}{\frac{54.000}{\lambda} + 72.000 + 60.000 \cdot \lambda}$$

$$\frac{4.968}{\lambda} + 6.624 + 5.520 \cdot \lambda = \frac{4.320}{\lambda} + 7.200 + 5.400 \cdot \lambda$$

$$\frac{648}{\lambda} + 120 \cdot \lambda = 576 \Rightarrow 120 \cdot \lambda^2 - 576 \cdot \lambda + 648 = 0 \Rightarrow$$

$$5 \cdot \lambda^2 - 24 \cdot \lambda + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 3 \text{ ή } \lambda = 9/5$$

Συνεπώς τα τρία κεφάλαια είναι: $K_1 = 200$, $K_2 = 600$, $K_3 = 1.800$ ή

$$K_1 = \frac{1.000}{3},\ K_2 = 600,\ K_3 = 1.080.$$

1.2.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Κάποιος που κέρδισε ένα χρηματικό ποσό K θέλησε να το καταθέσει σε δύο τράπεζες. Το 1/3 του ποσού το κατέθεσε για 3 χρόνια 5 μήνες και 12 μέρες με επιτόκιο 6% και το υπόλοιπο για 2 χρόνια 2 μήνες και 12 ημέρες με επιτόκιο 3%, και εισέπραξε και από τις δύο καταθέσεις συνολικό τόκο €654. Να βρεθεί το ποσό K. (Έτος μικτό.) (€5.787,6)
2. Κεφάλαιο K1 τοκίζεται με επιτόκιο 6% για 5 μήνες, κεφάλαιο K2 τοκίζεται με 8% για 2 χρόνια και τέλος κεφάλαιο K3 με 9 % για 60 ημέρες αντίστοιχα. Το άθροισμα των τόκων των K1, K2 είναι €692, των K2, K3 είναι €302 και των K3, K1 είναι €450. Να βρεθούν τα κεφάλαια. (K1=€16.800, K2=€1.700, K3=€2.000)
3. Δύο κεφάλαια €20.000 και €25.000 τοκίστηκαν με διάφορα επιτόκια και σε 200 ημέρες έφεραν συνολικά τόκους €8.000. Αν ο τόκος του δεύτερου κεφαλαίου είναι μεγαλύτερος κατά €1.000 με ποια επιτόκια τοκίστηκαν τα κεφάλαια αυτά; (Έτος μικτό.) (i1=0,324, i2=0,315)
4. Τρία αδέλφια ηλικίας 9,11 και 15 χρόνων καταθέτουν σε τράπεζα ποσά που είναι ανάλογα των ηλικιών τους. Ο πρώτος καταθέτει τα χρήματα του για 8 μήνες με επιτόκιο 8% ,ο δεύτερος για 10 μήνες με επιτόκιο 6% και τέλος ο τρίτος για 2 χρόνια με επιτόκιο 7%. Αν στο τέλος πήραν συνολικό τοκοκεφάλαιο €3.813 να βρεθεί το ποσό που κατέθεσε ο καθένας. (K1=€900, K2=€1.100, K3=€1.500)

5. Τοκίζουμε ένα κεφάλαιο για 6 μήνες και γίνεται μαζί με τους τόκους του €28.890. Αν το είχαμε τοκίσει με επιτόκιο 2% μικρότερο θα χρειαζόταν 1 μήνα περισσότερο για να δώσει το ίδιο τοκοκεφάλαιο. Να βρεθούν τα επιτόκια και το κεφάλαιο (i=0,14, K=€27.000)
6. Καταθέσαμε ένα κεφάλαιο για 8 μήνες και έγινε μαζί με τους τόκους του €4.368. Το τοκοκεφάλαιο €4.368 τοκίστηκε για 2 χρόνια, με το ίδιο επιτόκιο, και έγινε μαζί με τους τόκους του €4.892,16. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο και ποιο το επιτόκιο; (K=€4.200, i=0,06)
7. Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατά €1.000. Τοκίζουμε το $1^{ο}$ για 9 μήνες με επιτόκιο 4% και το $2^{ο}$ για 6 μήνες με επιτόκιο 6%. Ο συνολικός τόκος είναι €870. Να βρεθούν τα κεφάλαια. (K1=€12.000, K2=€11.000)
8. Τοκίζουμε δύο κεφάλαια K1, K2 με επιτόκια 14% και 16% αντίστοιχα και παίρνουμε συνολικό ετήσιο τόκο €8.200. Αν εναλλάξουμε τα επιτόκια θα πάρουμε συνολικό ετήσιο τόκο €100 περισσότερο. Να βρεθούν τα δύο κεφάλαια. (K1=€30.000, K2=€25.000)
9. Δύο κεφάλαια συνολικού ποσού €36.000 τοποθετούνται: το πρώτο με 5% για 120 ημέρες και το δεύτερο με 4% για 150 ημέρες. Ο τόκος του πρώτου είναι το 1/2 του τόκου του δεύτερου. Να βρεθούν τα δύο κεφάλαια. (K1=€12.000, K2=€24.000)

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 2

2. Προεξόφληση με απλό τόκο

2.1. Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι οι συναλλαγές μεταξύ επιχειρήσεων σπανίως γίνονται με μετρητά. Ειδικά στις χώρες του εξωτερικού οι συναλλαγές με μετρητά καλύπτουν μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των συναλλαγών. Αυτό συμβαίνει είτε για λόγους ασφάλειας, είτε γιατί τη χρονική στιγμή της συναλλαγής, ο αγοραστής, συνήθως αδυνατεί να καταβάλλει το αντίτιμο στον πωλητή, οπότε υπογράφει ένα ειδικό νομικό έγγραφο με το οποίο έχει την υποχρέωση να τον εξοφλήσει μετά από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Για τον λόγο αυτό και για την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη εξασφάλιση στις εμπορικές συναλλαγές, έχουν καθιερωθεί ειδικά έντυπα τα οποία επιτρέπουν, στον μεν πωλητή να γνωρίζει την ακριβή ημερομηνία της πληρωμής του, στον δε αγοραστή την ευχέρεια να πληρώσει σε μεταγενέστερο χρόνο. Τα έγγραφα αυτά είναι: οι συναλλαγματικές, τα γραμμάτια και οι επιταγές.

- Το Γραμμάτιο είναι έγγραφο το οποίο συντάσσεται και υπογράφεται από τον οφειλέτη και αποτελεί υπόσχεση προς τον πιστωτή να πληρώσει ένα ορισμένο ποσό σε ορισμένο χρόνο.
- Η Συναλλαγματική είναι έγγραφο το οποίο εκδίδεται και υπογράφεται από τον πιστωτή και με αυτό υποχρεώνει τον οφειλέτη να του πληρώσει ένα ορισμένο ποσό σε ορισμένο χρόνο.
- Η Επιταγή είναι έντυπο που υπογράφεται από τον οφειλέτη είναι προσωπική (αναφέρει το όνομα του δικαιούχου) και αποτελεί υποχρέωση του προς τον πιστωτή να πληρώσει ένα ορισμένο ποσό σε ορισμένο χρόνο.

Οι δύο πρώτοι πιστωτικοί τίτλοι έχουν ακριβώς τον ίδιο ρόλο στην αγορά και επιπλέον έχουν εξομοιωθεί με νόμο. Ειδικά σήμερα χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά η συναλλαγματική, μιας και σε αυτήν υπάρχουν οι υπογραφές του πιστωτή και του οφειλέτη, απαραίτητη προϋπόθεση για την προεξόφληση της. Σε μία συναλλαγματική εκτός από τις δυο υπογραφές αναγράφεται το ποσό που πρέπει να αποδώσει ο οφειλέτης στον πιστωτή, καθώς και η ημερομηνία της πληρωμής (η ημερομηνία λήξης της συναλλαγματικής). Αν ο πιστωτής δεν έχει ανάγκη τα χρήματα περιμένει μέχρι την ημερομηνία λήξης της συναλλαγματικής, οπότε πηγαίνει στην τράπεζα για να εισπράξει το ποσό που αναγράφεται πάνω σε αυτήν. Αν όμως χρειαστεί τα χρήματα νωρίτερα από τη λήξη της, τότε έχει τη δυνατότητα να πάει στην τράπεζα και να εξαργυρώσει τη συναλλαγματική, παίρνοντας ένα ποσό που ισούται με τη διαφορά της ονομαστικής αξίας μείον τους τόκους που αντιστοιχούν στο διάστημα μέχρι τη λήξη, διαδικασία που ονομάζεται **προεξόφληση**.

Για περισσότερες λεπτομέρειες δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

2.2. Βασικές έννοιες προεξόφλησης

Η ρευστοποίηση μιας συναλλαγματικής ή ενός γραμματίου ή μιας επιταγής πριν από τη λήξη τους ονομάζεται **προεξόφληση**. Κατά τη διαδικασία αυτή της ρευστοποίησης, η τράπεζα αφού πρώτα παρακρατήσει τους τόκους, μας αποδίδει το υπόλοιπο κεφάλαιο, ποσό που ονομάζεται **παρούσα αξία**. Οι τόκοι υπολογίζονται από την ημέρα της προεξόφλησης μέχρι τη λήξη της συναλλαγματικής, υπολογίζοντας και την ημέρα της προεξόφλησης αλλά και την ημέρα της λήξης. Από τα παραπάνω προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- **Ονομαστική** αξία μιας συναλλαγματικής είναι το ποσό που αναγράφεται πάνω σε αυτήν και που θα εισπράξουμε την ημέρα της λήξης της.
- **Παρούσα** αξία μιας συναλλαγματικής είναι η αξία αυτής, μια οποιαδήποτε ημερομηνία πριν τη λήξη της.
- **Προεξόφλημα** είναι το ποσό που κρατάει η τράπεζα για τους τόκους από την ημέρα της προεξόφλησης, μέχρι τη λήξη της.

2.3. Προεξόφληση χωρίς έξοδα

Στην περίπτωση κατά την οποία η προεξόφληση γίνεται από την τράπεζα χωρίς την παρακράτηση άλλων εξόδων, όπως θα δούμε παρακάτω, τότε μας ενδιαφέρουν μόνο η ονομαστική αξία, η παρούσα αξία της συναλλαγματικής καθώς και το προεξόφλημα. Με βάση τα παραπάνω η σχέση η οποία συνδέει τα παραπάνω μεγέθη είναι:

$$K = A + E \tag{1}$$

Όπου με K συμβολίζουμε την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής, με A την παρούσα αξία της και με E το προεξόφλημα.

2.3.1. Εξωτερική προεξόφληση

Αν για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος (τόκου) θεωρήσουμε ως κεφάλαιο την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής (K). τότε η προεξόφληση ονομάζεται **εξωτερική** και το αντίστοιχο προεξόφλημα εξωτερικό (E_1). Την παρούσα αξία θα τη συμβολίσουμε με A_1. Παρόλο που η εξωτερική προεξόφληση είναι άδικη για τον κομιστή της συναλλαγματικής, γιατί του παρακρατούνται τόκοι για χρήματα που τη στιγμή της προεξόφλησης δεν έχει, αλλά που θα έχει στο μέλλον, εντούτοις χρησιμοποιείται από τις περισσότερες χώρες παγκοσμίως συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας.

2.3.1.1. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Επειδή το προεξόφλημα είναι ο τόκος που αντιστοιχεί σε κάποιο χρονικό διάστημα όπως μάθαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτό θα ισούται με:

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \tag{2}$$

αν ο χρόνος είναι μετρημένος σε μέρες

$$E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \tag{3}$$

αν ο χρόνος είναι μετρημένος σε μήνες

$$E_1 = K \cdot n \cdot i \tag{4}$$

αν ο χρόνος είναι μετρημένος σε χρόνια
όπου
K είναι η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής
ν οι μέρες, μ οι μήνες και n τα χρόνια από τη στιγμή της προεξόφλησης μέχρι τη λήξη της συναλλαγματικής και
i το επιτόκιο της προεξόφλησης

Σημειώνεται επίσης ότι στη σχέση (2) ο παρονομαστής θα είναι 360 αν μας δίνεται ότι το έτος είναι εμπορικό ή μικτό και 365 αν είναι πολιτικό.

Παράδειγμα 1

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας €3.000 προεξοφλείται εξωτερικά 72 μέρες πριν τη λήξη της με επιτόκιο 10%. Να βρεθεί το προεξόφλημα και η παρούσα αξία. (Έτος μικτό.)

Λύση

Έχουμε ότι $K = 3.000$, $\nu = 72$ και $i = 0,1$

Επειδή το χρονικό διάστημα της προεξόφλησης είναι υπολογισμένο σε μέρες και το έτος μικτό θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη σχέση (2) και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$E = \frac{3.000 \cdot 72 \cdot 0,1}{360} \Rightarrow E = 60$$

Από την αρχική σχέση $K = A_1 + E_1$ προκύπτει ότι $A_1 = K - E_1$ άρα $A_1 = 2.940$. Συνεπώς το προεξόφλημα ισούται με €60 και η παρούσα αξία με €2.940.

Παράδειγμα 2

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας €1.460 η οποία λήγει στις 18 Νοεμβρίου, προεξοφλήθηκε εξωτερικώς στις 17 Ιουλίου και κρατήθηκε προεξόφλημα €50. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση.(Έτος πολιτικό.)

Λύση

Έχουμε ότι $K = 1.460$, $E_1 = 50$ και $\nu = 60$ (15 Ιούλιος + 31 Αύγουστος + 30 Σεπτέμβριος + 31 Οκτώβριος + 18 Νοέμβριος =125)

$E_1 = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$ ή αν λύσουμε την εξίσωση ως προς το επιτόκιο (i) που είναι ο άγνωστος μας θα βρούμε

$$i = \frac{365 \cdot E_1}{K \cdot \nu}$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$i = \frac{365 \cdot 50}{1.460 \cdot 125} \Rightarrow i = \frac{18.250}{182.500} = 0{,}1$$

Άρα το επιτόκιο προεξόφλησης είναι $i = 0{,}1$ ή 10%.

Παράδειγμα 3

Γραμμάτιο που λήγει σε 8 μήνες προεξοφλείται σήμερα εξωτερικώς με επιτόκιο 6%. Αν κρατήθηκε προεξόφλημα €120, να βρεθεί η ονομαστική αξία του γραμματίου καθώς και η παρούσα αξία του.

Λύση

Έχουμε ότι $E_1 = 120$, $\mu = 8$ και $i = 0{,}06$

$$E_1 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12} \Rightarrow K = \frac{12 \cdot E_1}{\mu \cdot i} \Rightarrow K = \frac{12 \cdot 120}{8 \cdot 0{,}06} \Rightarrow K = \frac{1.440}{0{,}48} \Rightarrow K = 3.000$$

Για να βρούμε την παρούσα αξία έχουμε: $A_1 = K - E$ και τελικά βρίσκουμε $A_1 = 2.880$.

Παράδειγμα 4

Επιταγή ονομαστικής αξίας €1.800 προεξοφλείται εξωτερικώς με επιτόκιο 12%. Αν η διαφορά της παρούσας αξίας από το προεξόφλημα είναι €1.200 να βρεθεί πόσες μέρες πριν τη λήξη της επιταγής έγινε η προεξόφληση. (Έτος εμπορικό.)

Λύση

Έχουμε ότι: $K = 1.800$, $i = 0{,}12$ και $A_1 - E_1 = 1.200$

$K = 1.800 \Rightarrow A_1 + E_1 = 1.800$ οπότε καταλήγουμε σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$\begin{matrix} A_1 - E_1 = 1.200 \\ A_1 + E_1 = 1.800 \end{matrix}$ προσθέτουμε κατά μέλη και βρίσκουμε:

$2 \cdot A_1 = 3.000 \Rightarrow A_1 = 1.500$ άρα $E_1 = 300$

Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (2) και βρίσκουμε:

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow 300 = \frac{1.800 \cdot \nu \cdot 0{,}12}{360}$$

πολλαπλασιάζουμε χιαστί και έχουμε:

$$1.800 \cdot 0{,}12 \cdot \nu = 300 \cdot 360 \Rightarrow 216 \cdot \nu = 108.000 \Rightarrow \nu = 500$$

Συνεπώς η προεξόφληση έγινε 600 μέρες πριν τη λήξη της επιταγής.

2.3.1.2. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

Από τη βασική σχέση $K = A_1 + E_1$, αν κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο του προεξοφλήματος $E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$ την ονομαστική αξία (K) για την απαλοιφή της θα πάρουμε:

$$E_1 = \frac{(A_1 + E_1) \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow E_1 = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360} + \frac{E_1 \cdot \nu \cdot i}{360}$$

και

$$E_1 - \frac{E_1 \cdot \nu \cdot i}{360} = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot E_1}{360} = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360}$$

οπότε αν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύσουμε ως προς E_1 θα βρούμε το προεξόφλημα ως συνάρτηση της παρούσας αξίας δηλαδή:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360 - \nu \cdot i} \tag{5}$$

Εδώ βέβαια θεωρήσαμε το έτος μικτό ή εμπορικό και πήραμε ως αριθμό ημερών τις 360. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα δουλεύαμε αν το έτος ήταν πολιτικό και είχαμε 365 μέρες. Αν τώρα αντί για μέρες είχαμε μήνες ή χρόνια οι τύποι που προκύπτουν αντίστοιχα είναι:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i}$$

όπου μ οι μήνες της προεξόφλησης και

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot n \cdot i}{1 - n \cdot i}$$

όπου n τα χρόνια της προεξόφλησης.

Παράδειγμα 5

Επιταγή που λήγει σε 8 μήνες από σήμερα προεξοφλείται με επιτόκιο 8% και δίνει παρούσα αξία €1.420. Να βρεθεί το εξωτερικό προεξόφλημα και η ονομαστική αξία της επιταγής.

Λύση

Έχουμε ότι $A_1 = 1.420$, $\mu = 8$ και $i = 0,08$

Παίρνοντας τον αντίστοιχο τύπο για μήνες έχουμε:

$$E_1 = \frac{A_1 \cdot \mu \cdot i}{12 - \mu \cdot i} \Rightarrow E_1 = \frac{1.420 \cdot 8 \cdot 0,08}{12 - 8 \cdot 0,08} \Rightarrow E_1 = \frac{908,8}{11,36} \Rightarrow E_1 = 80$$

Άρα το εξωτερικό προεξόφλημα είναι €80 οπότε η ονομαστική αξία της επιταγής είναι 1.420+80=€1.500.

Παράδειγμα 6

Συναλλαγματική που λήγει στις 12/06 προεξοφλείται σήμερα στις 15 Μαρτίου και κρατήθηκαν τόκοι €120. Αν το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 10% να βρεθεί το ποσό που πήραμε κατά την προεξόφληση. (Έτος μικτό.)

Λύση

Έχουμε ότι $E_1 = 120$ $i = 0,1$ και $\nu = 90$ (17 Μάρτιος + 30 Απρίλιος + 31 Μάιος +12 Ιούνιος =90)

Από τον τύπο $E_1 = \frac{A_1 \cdot \nu \cdot i}{360 - \nu \cdot i}$ λύνουμε ως προς A_1 και

έχουμε : $A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot E_1}{\nu \cdot i}$ και με αντικατάσταση των δεδομένων:

$$A_1 = \frac{(360 - 90 \cdot 0,1) \cdot 120}{90 \cdot 0,1} \Rightarrow A_1 = \frac{351 \cdot 120}{9} \Rightarrow A_1 = 4.680$$

2.3.1.3. Υπολογισμός της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Ξεκινώντας από τη βασική σχέση $K = A_1 + E_1$ αν λύσουμε ως προς A_1 έχουμε: $A_1 = K - E_1$, όμως $E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$ άρα τελικά έχουμε: $A_1 = K - \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360}$

Άρα η σχέση που μας δίνει την παρούσα αξία ως συνάρτηση της ονομαστικής αξίας είναι:

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} \tag{6}$$

Παράδειγμα 7

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €7.300 προεξοφλείται εξωτερικώς 80 μέρες πριν τη λήξη του με ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η παρούσα αξία του γραμματίου με έτος πολιτικό. Κατόπιν να βρεθεί το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε $K = 7.300$, $\nu = 80$ και $i = 0,06$

Από τη σχέση (6) για έτος πολιτικό έχουμε:

$$A_1 = \frac{(365 - 80 \cdot 0,06) \cdot 7.300}{365} \Rightarrow A_1 = \frac{360,2 \cdot 7.300}{365} \Rightarrow A_1 = 7.204$$

Επομένως τα χρήματα που θα εισπράξουμε από το γραμμάτιο είναι €7.204 οπότε και το προεξόφλημα θα είναι 7.300–7.204=€96.

Παράδειγμα 8

Επιταγή η οποία λήγει στις 19 Αυγούστου προεξοφλείται εξωτερικώς στις 12 Μαΐου και δίνει παρούσα αξία ίση με τα 5/6 της ονομαστικής της αξίας. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση. (Έτος μικτό.)

Λύση

Έχουμε ότι: $A_1 = \frac{5}{6} \cdot K$, $\nu = 100$ (20 Μάιος + 30 Ιούνιος + 31 Ιούλιος + 19 Αύγουστος = 100 μέρες)

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot K = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360}$$

η ονομαστική αξία της επιταγής όμως είναι διάφορη του μηδενός οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με K για να το απαλείψουμε.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{5}{6} = \frac{360 - \nu \cdot i}{360} \Rightarrow 5 \cdot 360 = 6 \cdot (360 - \nu \cdot i) \Rightarrow 1.800 = 2.160 - 6 \cdot \nu \cdot i$$

κάνουμε αντικατάσταση το ν και λύνουμε ως προς i και βρίσκουμε:

$$6 \cdot 100 \cdot i = 2.160 - 1.800 \Rightarrow 600 \cdot i = 360 \Rightarrow i = \frac{360}{600} = 0,6$$

έτσι το επιτόκιο είναι $i = 0,6$

2.3.1.4. Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

Αν στη σχέση $K = A_1 + E_1$ κάνουμε αντικατάσταση το $E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$ θα βρούμε:

$$K = A_1 + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow K - \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} = A_1$$

ή

$$\frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} = A_1 \Rightarrow (360 - \nu \cdot i) \cdot K = 360 \cdot A_1$$

οπότε τελικά βρίσκουμε:

$$K = \frac{360 \cdot A_1}{360 - \nu \cdot i}$$

(7)

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί η ονομαστική αξία συναλλαγματικής που έληγε στις 20 Ιουνίου και προεξοφλήθηκε εξωτερικώς στις 3 Απριλίου αντί €1.752. Επιτόκιο 12%. Στη συνέχεια να βρείτε το εξωτερικό προεξόφλημα. (Έτος εμπορικό.)

Λύση

Έχουμε $A_1 = 1.752$, $i = 0{,}12$ και $\nu = 80$ (29 Απρίλιος + 31 Μάιος 20 Ιούνιος = 80)

Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (7) και έχουμε:

$$K = \frac{360 \cdot 1.752}{360 - 80 \cdot 0{,}12} \Rightarrow K = \frac{630.720}{350{,}4} \Rightarrow K = 1.800$$

Επομένως η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής είναι €1.800 ενώ το εξωτερικό προεξόφλημα τότε θα είναι 1.800-1.752=€48.

2.3.2. Εσωτερική προεξόφληση

Αν στην προεξόφληση, στον υπολογισμό του τόκου θεωρήσουμε ως κεφάλαιο την παρούσα αξία A_2 τότε η προεξόφληση ονομάζεται εσωτερική και το αντίστοιχο προεξόφλημα εσωτερικό E_2.

2.3.2.1. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία.

Από τον ορισμό της εσωτερικής προεξόφλησης έχουμε ότι η σχέση που συνδέει το προεξόφλημα ως συνάρτηση της παρούσας αξίας δίνεται απευθείας από τον ορισμό και είναι:

$$E_2 = \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360}$$

(8)

όταν ο χρόνος προεξόφλησης είναι μετρημένος σε μέρες. Αντίστοιχα προκύπτουν οι τύποι για μήνες και χρόνια. Όπως φαίνεται και από τον τύπο (8) για να βρούμε τον τόκο της προεξόφλησης θεωρούμε ως κεφάλαιο την αξία που έχει το γραμμάτιο εκείνη τη στιγμή. Παρόλο όμως που αυτό θεωρείται και δικαιότερο, επειδή (όπως θα δούμε και παρακάτω), οι τόκοι που προκύπτουν σε αυτήν την περίπτωση είναι λιγότεροι οι τράπεζες χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση.

Παράδειγμα 10

Συναλλαγματική προεξοφλείται εσωτερικώς με επιτόκιο 10% και δίνει παρούσα αξία €4.320 και προεξόφλημα €96. Να βρεθεί πόσες μέρες πριν τη λήξη της συναλλαγματικής έγινε η προεξόφληση. (Έτος μικτό.)

Λύση

Έχουμε $A_2 = 4.320$, $E_2 = 96$ και $i = 0{,}1$

Από τη σχέση (8) έχουμε:

$$E_2 = \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow 96 = \frac{4.320 \cdot \nu \cdot 0{,}1}{360} \Rightarrow 4.320 \cdot \nu \cdot 0{,}1 = 96 \cdot 360 \Rightarrow \nu = \frac{34.560}{432} \Rightarrow \nu = 80$$

άρα η προεξόφληση έγινε 80 μέρες πριν τη λήξη της συναλλαγματικής.

2.3.2.2. Υπολογισμός του προεξοφλήματος όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Από τη βασική σχέση της προεξόφλησης $K = A_2 + E_2$ αν λύσουμε ως προς A_2 έχουμε $A_2 = K - E_2$, οπότε αν πάρουμε τη σχέση (8) και κάνουμε αντικατάσταση το A_2 έχουμε:

$$E_2 = \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow E_2 = \frac{(K - E_2) \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow E_2 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} - \frac{E_2 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow$$

ή

$$E_2 + \frac{E_2 \cdot \nu \cdot i}{360} = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow \frac{(360 + \nu \cdot i) \cdot E_2}{360} = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360}$$

στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε τελικά τη σχέση που μας δίνει το εσωτερικό προεξόφλημα ως συνάρτηση της ονομαστικής αξίας:

$$E_2 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i} \tag{9}$$

Παράδειγμα 11

Επιταγή ονομαστικής αξίας €620 προεξοφλείται 100 μέρες πριν τη λήξη της. Αν το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 12% το έτος μικτό και η προεξόφληση εσωτερική να βρεθεί το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε ότι: $K = 620$, $\nu = 100$ και $i = 0{,}12$

Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (9) και έχουμε:

$$E_2 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i} \Rightarrow E_2 = \frac{620 \cdot 100 \cdot 0{,}12}{360 + 100 \cdot 0{,}12} \Rightarrow E_2 = \frac{7.440}{372} \Rightarrow E_2 = 20$$

Άρα το εσωτερικό προεξόφλημα ισούται με €20.

Παράδειγμα 12

Συναλλαγματική της οποίας το προεξόφλημα ισούται με το 1/16 της ονομαστικής της αξίας προεξοφλείται εσωτερικώς 4 μήνες πριν τη λήξη της. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση.

Λύση

Έχουμε ότι $E_2 = \frac{1}{16} \cdot K$, και $\mu = 4$. Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (9) και έχουμε:

$$E_2 = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i} \Rightarrow \frac{1}{16} \cdot K = \frac{K \cdot \mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i}.$$

Η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής (Κ) δεν μπορεί να είναι ίση με μηδέν άρα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης με Κ οπότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{16} = \frac{\mu \cdot i}{12 + \mu \cdot i}$$

κάνουμε χιαστί και βρίσκουμε:

$$12 + \mu \cdot i = 16 \cdot \mu \cdot i \Rightarrow 12 = 15 \cdot \mu \cdot i \Rightarrow 12 = 15 \cdot 4 \cdot i \Rightarrow i = \frac{12}{60} \Rightarrow i = 0{,}2$$

Άρα το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 20%.

2.3.2.3. Υπολογισμός της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Έχουμε ότι: $K = A_2 + E_2 \Rightarrow E_2 = K - A_2$. Κάνουμε αντικατάσταση το E_2 στη σχέση: $E_2 = \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360}$ και έχουμε $K - A_2 = \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow K = A_2 + \frac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow K = \frac{A_2 \cdot (360 + \nu \cdot i)}{360}$ οπότε λύνουμε ως προς A_2 και βρίσκουμε την παρούσα αξία ως συνάρτηση της ονομαστικής αξίας

$$A_2 = \frac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i} \tag{10}$$

Παράδειγμα 13

Επιταγή ονομαστικής αξίας €650 προεξοφλείται εσωτερικώς με επιτόκιο 10% και μας δίνει €600. Πόσες μέρες πριν τη λήξη της επιταγής έγινε η προεξόφληση;

Λύση

Έχουμε $K = 650$, $A_2 = 600$ και $i = 0{,}1$

Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (10) και έχουμε:

$A_2 = \dfrac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i} \Rightarrow 600 = \dfrac{360 \cdot 650}{360 + \nu \cdot 0{,}1}$ πολλαπλασιάζουμε χιαστί και έχουμε:

$600 \cdot (360 + \nu \cdot 0{,}1) = 360 \cdot 650 \Rightarrow 216.000 + 60 \cdot \nu = 234.000$ οπότε

τελικά: $60 \cdot \nu = 18.000 \Rightarrow \nu = 300$

Άρα η προεξόφληση έγινε 300 μέρες πριν τη λήξη της επιταγής.

Παράδειγμα 14

Γραμμάτιο προεξοφλείται εσωτερικά 15 μήνες πριν τη λήξη του. Αν το πηλίκο της παρούσας προς την ονομαστική αξία ισούται με 0,8 να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση.

Λύση

Έχουμε: $\mu = 15$ και $\dfrac{A_2}{K} = 0{,}8$.

Από την σχέση (10) για μήνες έχουμε:

$$A_2 = \frac{12 \cdot K}{12 + \mu \cdot i}$$

Ξέρουμε ότι η ονομαστική αξία του γραμματίου δεν μπορεί να είναι ίση με μηδέν ($K \neq 0$) άρα μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με K για να δημιουργήσουμε το πηλίκο $\dfrac{A_2}{K}$ που είναι δεδομένο από την άσκηση.

Έτσι $\dfrac{A_2}{K} = \dfrac{\frac{12 \cdot K}{12 + \mu \cdot i}}{K} \Rightarrow \dfrac{A_2}{K} = \dfrac{12}{12 + \mu \cdot i}$ κάνουμε αντικατάσταση τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$0{,}8 = \frac{12}{12 + 15 \cdot i}$$

πολλαπλασιάζουμε χιαστί και λύνουμε την εξίσωση:

$$0{,}8 \cdot (12 + 15 \cdot i) = 12 \Rightarrow 9{,}6 + 12 \cdot i = 12 \Rightarrow 12 \cdot i = 12 - 9{,}6 \Rightarrow 12 \cdot i = 2{,}4$$

έτσι τελικά έχουμε $i = 0{,}2$ δηλαδή το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 20%.

2.3.3. Σύγκριση εξωτερικής και εσωτερικής εροεξόφλησης

Όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, στην εξωτερική προεξόφληση υπολογίζουμε το προεξόφλημα (E) ως συνάρτηση της ονομαστικής αξίας (K) ενώ στην εσωτερική προεξόφληση ως συνάρτηση της παρούσας αξίας (A). Από τη βασική σχέση της προεξόφλησης $K = A + E$ είναι προφανές ότι η ονομαστική αξία ενός γραμματίου είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την παρούσα αξία ($K > A$). Με βάση τον ορισμό των δύο προεξοφλήσεων αναμενόμενο είναι βέβαια ότι το εξωτερικό προεξόφλημα θα είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το εσωτερικό προεξόφλημα. Θέλουμε να εξετάσουμε τη διαφορά των δύο προεξοφλημάτων και να διαπιστώσουμε πότε και αν αυτή είναι σημαντική.

Ξέρουμε ότι ο αριθμός των ημερών (ν) πριν από τη λήξη της συναλλαγματικής που έγινε η προεξόφληση καθώς και το επιτόκιο i είναι θετικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Έτσι γνωρίζουμε ότι και το γινόμενο τους είναι θετικός αριθμός επίσης. Οπότε καταλήγουμε ότι:

$$360 < 360 + \nu \cdot i \Rightarrow \frac{1}{360} > \frac{1}{360 + \nu \cdot i}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ανίσωσης με το γινόμενο $K \cdot \nu \cdot i$ (που είναι βέβαια θετικός αριθμός) θα έχουμε:

$$\frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} > \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i}$$

Από τις σχέσεις (2) και (9) προκύπτει τελικά ότι:

$$E_1 > E_2 \tag{11}$$

Η διαφορά όπως φαίνεται και στην παραπάνω διαδικασία που ακολουθήθηκε οφείλεται στον όρο $\nu \cdot i$. Δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το γινόμενο αυτό τόσο μεγαλώνει και η διαφορά των δύο προεξοφλημάτων. Ειδικά σε περιπτώσεις λοιπόν που και το επιτόκιο είναι αρκετά υψηλό αλλά και το διάστημα προεξόφλησης αρκετά μεγάλο η διαφορά αυτή είναι ουσιαστική. Επειδή λοιπόν στη χώρα μας οι τράπεζες χρησιμοποιούν την εξωτερική προεξόφληση, στις παραπάνω περιπτώσεις η αδικία που γίνεται εις βάρος των πελατών είναι αρκετά σημαντική.

Επειδή βέβαια το άθροισμα $A+E$ είναι σταθερό αφού η ονομαστική αξία τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική προεξόφληση είναι η ίδια, όσο μικρότερο είναι το προεξόφλημα τόσο μεγαλύτερη είναι η παρούσα αξία. Έτσι λοιπόν με βάση τη σχέση (11) ισχύει ότι:

$$A_1 < A_2$$

Η παρούσα αξία στην εξωτερική προεξόφληση είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στην εσωτερική προεξόφληση. Τα χρήματα δηλαδή που θα πάρουμε αν προεξοφλήσουμε ένα γραμμάτιο εξωτερικά, θα είναι λιγότερα από τα αντίστοιχα της εσωτερικής προεξόφλησης. Για να δείξουμε όμως τη διαφορά, έχουμε από τις σχέσεις (6) και (10) ότι:

$$A_1 < A_2 \Rightarrow \frac{K \cdot (360 - \nu \cdot i)}{360} < \frac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i}$$

αν απλοποιήσουμε το K από τα δύο μέλη της ανίσωσης θα έχουμε:

$$\frac{360 - \nu \cdot i}{360} < \frac{360}{360 + \nu \cdot i} \Rightarrow 360^2 - \nu^2 \cdot i^2 < 360^2 \Rightarrow \nu^2 \cdot i^2 > 0$$

κάτι βέβαια που είναι προφανές.

Στις περιπτώσεις που έχουμε και των δύο ειδών τις προεξοφλήσεις μας συμφέρει να χρησιμοποιούμε τους τύπους που είναι λυμένοι ως προς την ονομαστική αξία, ποσό που είναι κοινό και για τα δύο είδη, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν λιγότερους αγνώστους.

Για να δούμε τη διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στο εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 15

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας €5.000 προεξοφλείται 540 μέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 20%. Να βρεθεί το εξωτερικό και το εσωτερικό προεξόφλημα αν το έτος είναι εμπορικό.

Λύση

Έχουμε: $K = 5.000$, $\nu = 540$ και $i = 0,2$.

Για την εξωτερική προεξόφληση από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$E_1 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \Rightarrow E_1 = \frac{5.000 \cdot 540 \cdot 0,2}{360} \Rightarrow E_1 = 1.500$$

Συνεπώς στην εξωτερική προεξόφληση θα χάσουμε από τόκους €1.500 και θα πάρουμε τα υπόλοιπα €3.500.

Για την εσωτερική προεξόφληση από τη σχέση (9) βρίσκουμε:

$$E_2 = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i} \Rightarrow E_2 = \frac{5.000 \cdot 540 \cdot 0,2}{360 + 540 \cdot 0,2} \Rightarrow E_2 = \frac{540.000}{468} \Rightarrow E_2 \simeq 1.153,85$$

Ενώ στην εσωτερική προεξόφληση οι τόκοι θα είναι €1.153,85 και θα πάρουμε τα υπόλοιπα €3.846,15. Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαφορά στα χρήματα που θα πάρουμε είναι €346,15.

Η διαφορά βέβαια είναι τόσο μεγάλη γιατί και το επιτόκιο είναι σχετικά υψηλό (20%) και το διάστημα της προεξόφλησης αρκετά μεγάλο.

Συνήθως στις τράπεζες οι προεξοφλήσεις γίνονται για μικρότερο αριθμό ημερών και η διαφορά δεν είναι τόσο εμφανής.

Παράδειγμα 16

Συναλλαγματική προεξοφλείται 200 μέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 20% και έδωσε διαφορά των δύο προεξοφλημάτων ίση με €60. Αν έχουμε έτος μικτό να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής.

Λύση

Έχουμε ότι: $\nu = 200$, $i = 0,2$ και $E_1 - E_2 = 60$. Από τις σχέσεις (2) και (9) αν τις αφαιρέσουμε κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{K\cdot\nu\cdot i}{360} \\ E_2 &= \frac{K\cdot\nu\cdot i}{360+\nu\cdot i}\end{aligned}\right\} \Rightarrow E_1 - E_2 = 60 \Rightarrow \frac{K\cdot\nu\cdot i}{360} - \frac{K\cdot\nu\cdot i}{360+\nu\cdot i} = 60 .$$

Κάνουμε αντικατάσταση τα δεδομένα και βρίσκουμε:

$$\frac{K\cdot 200\cdot 0,2}{360} - \frac{K\cdot 200\cdot 0,2}{360+200\cdot 0,2} = 60 \Rightarrow \frac{40\cdot K}{360} - \frac{40\cdot K}{400} = 60 \Rightarrow \frac{K}{9} - \frac{K}{10} = 60$$

$$\frac{K}{90} = 60 \Rightarrow K = 5.400 .$$

Άρα η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής είναι €5.400.

Παράδειγμα 17

Γραμμάτιο προεξοφλείται εξωτερικώς με επιτόκιο 10% και εσωτερικώς με επιτόκιο 12% και δίνει την ίδια παρούσα αξία. Αν έχουμε έτος εμπορικό, να βρεθεί πόσες μέρες πριν τη λήξη του γραμματίου έγινε η προεξόφληση.

Λύση

Έστω i_1 το επιτόκιο της εξωτερικής προεξόφλησης και i_2 της εσωτερικής. Τότε θα έχουμε $i_1 = 0{,}1$, $i_2 = 0{,}12$ και $A_1 = A_2$.

Από τις σχέσεις (6) και (10) βρίσκουμε:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{K\cdot(360-\nu\cdot i_1)}{360} = \frac{360\cdot K}{360+\nu\cdot i_2}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $K \neq 0$ για να απαλείψουμε την ονομαστική αξία

$$\frac{360-\nu\cdot i_1}{360} = \frac{360}{360+\nu\cdot i_2} \Rightarrow (360-\nu\cdot i_1)\cdot(360+\nu\cdot i_2) = 360^2$$

κάνουμε πράξεις:

$$360^2 + 360\cdot\nu\cdot i_2 - 360\cdot\nu\cdot i_1 - i_1\cdot i_2\cdot\nu^2 = 360^2$$

ή

$$360\cdot\nu\cdot i_2 - 360\cdot\nu\cdot i_1 - i_1\cdot i_2\cdot\nu^2 = 0$$

κάνουμε αντικατάσταση τα i_1, i_2 και βγάζουμε κοινό παράγοντα το ν

$$\nu\cdot(360\cdot 0{,}12 - 360\cdot 0{,}1 - 0{,}1\cdot 0{,}12\cdot\nu) = 0$$

ή

$$\Rightarrow \nu\cdot(43{,}2 - 36 - 0{,}012\cdot\nu) = 0 \Rightarrow \nu\cdot(7{,}2 - 0{,}012\cdot\nu) = 0$$

Άρα τελικά ή $\nu = 0$ το οποίο και απορρίπτεται αφού δεν μπορεί να έχουμε προεξόφληση μηδέν μέρες πριν από τη λήξη του γραμματίου ή $7{,}2 - 0{,}012\cdot\nu = 0 \Rightarrow \nu = \dfrac{7{,}2}{0{,}012}$ οπότε τελικά βρίσκουμε ότι η προεξόφληση του γραμματίου έγινε 600 μέρες πριν από τη λήξη του.

2.4. Προεξόφληση με έξοδα

Αν προεξοφλήσουμε μια συναλλαγματική στην τράπεζα, όπως γίνεται συνήθως, εκτός από τους τόκους στο προεξόφλημα προστίθενται και άλλες κρατήσεις υπέρ της τράπεζας. Έτσι στο βασικό επιτόκιο (σήμερα γύρω στο 6,9%) προστίθεται ακόμη ένα (περίπου 1,5%) που είναι ένα περιθώριο της τράπεζας που το χρεώνει ανάλογα με τον πελάτη, συν μια εισφορά στην τράπεζα (0,6%). Για μας βέβαια όλα αυτά τα επιτόκια θα είναι αθροιστικά ένα επιτόκιο και δεν θα μας ενδιαφέρουν οι επιμέρους όροι. Έτσι σε όλες τις ασκήσεις που θα δίνονται θα φαίνεται ένα επιτόκιο προεξόφλησης και τίποτε άλλο. Εκτός τώρα από τους τόκους, έχουμε μια επιπλέον κράτηση που υπολογίζεται σε ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας της συναλλαγματικής και είναι η προμήθεια της τράπεζας (1% τον χρόνο), διάφορα εισπρακτικά έξοδα που επίσης υπολογίζονται σε ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας και τέλος το χαρτόσημο το οποίο μπορεί να είναι ένα σταθερό ποσό ανεξάρτητο από το ποσό της συναλλαγματικής ή να υπολογίζεται σε ποσοστό και αυτό επί της ονομαστικής αξίας όπως και τα προηγούμενα (περίπου 0,35% σήμερα). Ανάλογα με την τράπεζα αλλά και τον πελάτη μπορεί να υπάρξουν και επιπλέον επιβαρύνσεις. Έτσι όμως θα είχαμε από τράπεζα σε τράπεζα ή και από πελάτη σε πελάτη διαφορετικούς τύπους υπολογισμού της παρούσας αξίας. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ένα συγκεκριμένο τρόπο υπολογισμού των εξόδων που να καλύπτει τις περισσότερες περιπτώσεις. Γενικά λοιπόν μπορούμε αρχικά να βρίσκουμε την παρούσα αξία χωρίς έξοδα και στη συνέχεια να αφαιρούμε τις επιπλέον κρατήσεις για να βρούμε το ποσό που θα εισπράξουμε τελικά.

Ας δούμε λοιπόν αναλυτικότερα τις πιο συνηθισμένες επιπλέον κρατήσεις που θα έχουμε κατά την προεξόφληση μιας συναλλαγματικής.

- Προμήθεια είναι η αμοιβή της τράπεζας για της υπηρεσίες της προεξόφλησης. Αναφέρεται σε ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας (1/12% για κάθε μήνα) και για ολόκληρους μήνες, άσχετα αν δεν έχει περάσει ολόκληρος ο μήνας αλλά μόνο ένα μέρος του.
- Εισπρακτικά είναι διάφορα έξοδα που κρατάνε κάποιες τράπεζες κατά την προεξόφληση από κάποιους πελάτες για να καλύψουν κάποια έξοδα τους και αναφέρονται επίσης σε ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας.
- Χαρτόσημο είναι έσοδο υπέρ του δημοσίου και ανάλογα με την περίπτωση μπορεί να είναι ένα συγκεκριμένο ποσό ή επίσης ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας.

2.4.1. Υπολογισμός της παρούσας αξίας όταν είναι γνωστή η ονομαστική αξία

Εξωτερικώς

Με βάση τη σχέση (6) που είχαμε υπολογίσει στην προεξόφληση χωρίς έξοδα τώρα θα έχουμε:

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - K \cdot \theta - K \cdot \varepsilon - X \tag{12}$$

όπου με το γράμμα θ συμβολίσαμε την προμήθεια, με το γράμμα ε τα εισπρακτικά και με το γράμμα X το χαρτόσημο.

Σε πολλές τράπεζες ο υπολογισμός του χαρτόσημου γίνεται σαν ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (12) θα γίνει:

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - (\theta + \varepsilon + X) \cdot K \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - p \cdot K \tag{13}$$

όπου $p = \theta + \varepsilon + X$, το συνολικό ποσοστό της επιπλέον επιβάρυνσης.

Παράδειγμα 18

Επιταγή ονομαστικής αξίας €1.800, λήξης στις 18 Αυγούστου προεξοφλείται εξωτερικώς στις 11 Απριλίου με ετήσιο επιτόκιο 7%. Η τράπεζα επίσης κράτησε έξοδα πινακίου 1/10% για κάθε μήνα, εισπρακτικά 2‰ και χαρτόσημο €0,90. Να βρεθεί η παρούσα αξία της επιταγής αν έχουμε έτος μικτό.

Λύση

Έχουμε $K = 1.800$, $i = 0,07$, $\nu = 130$ (20 Απρίλιος + 31 Μάιος + 30 Ιούνιος + 31 Ιούλιος + 18 Αύγουστος = 130)

$\theta = \left(\frac{1}{10} \times 5\right)\% = \frac{1}{2}\% = 0,005$, (5 οι μήνες από Απρίλιο έως Αύγουστο)

$$\varepsilon = \frac{2}{1.000} = 0,002 \text{ και τέλος } X = 0,90$$

Κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (12) και έχουμε:

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - K \cdot \theta - K \cdot \varepsilon - X$$

ή

$$A_1 = \frac{(360 - 130 \cdot 0,07) \cdot 1.800}{360} - 1.800 \cdot 0,005 - 1.800 \cdot 0,002 - 0,90 \Rightarrow$$

$$A_1 = 1.754,5 - 9 - 3,6 - 0,9 \Rightarrow A_1 = 1.741$$

Δηλαδή τελικά θα εισπράξουμε €1.741.

Εσωτερικώς

Από τη σχέση (10) που είδαμε παραπάνω αν υπολογίσουμε και τα έξοδα θα έχουμε:

$$A_2 = \frac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i} - K \cdot \theta - K \cdot \varepsilon - X$$

(14)

ή αν το χαρτόσημο υπολογίζεται ως ποσοστό επί της ονομαστικής αξίας θα βρούμε:

$$A_2 = \frac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i} - p \cdot K$$

όπου $p = \theta + \varepsilon + X$.

Παράδειγμα 19

Γραμμάτιο προεξοφλήθηκε εσωτερικώς 100 μέρες πριν από τη λήξη του και έδωσε παρούσα αξία ίση με το 94,5% της ονομαστικής του αξίας. Αν η τράπεζα κράτησε για προμήθεια 1%, και χαρτόσημο 0,5% επί της ονομαστικής αξίας, να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση.

Λύση

Έχουμε: $\nu = 100$, $\theta = 0,01$, $X = 0,005$ και $A_2 = 0,945 \cdot K \Rightarrow \frac{A_2}{K} = 0,945$

άρα $p = 0,01 + 0,005 = 0,015$.

$$A_2 = \frac{360 \cdot K}{360 + \nu \cdot i} - p \cdot K \Rightarrow A_2 = \left(\frac{360}{360 + \nu \cdot i} - p \right) \cdot K$$

ή

$$\frac{A_2}{K} = \frac{360}{360 + \nu \cdot i} - p \Rightarrow 0,945 = \frac{360}{360 + 100 \cdot i} - 0,015$$

$$0,945 + 0,015 = \frac{360}{360 + 100 \cdot i} \Rightarrow 0,96 = \frac{360}{360 + 100 \cdot i}$$

πολλαπλασιάζουμε χιαστί και βρίσκουμε:

$$0,96 \cdot (360 + 100 \cdot i) = 360 \Rightarrow 345,6 + 96 \cdot i = 360 \Rightarrow$$

$$96 \cdot i = 14,4 \Rightarrow i = \frac{14,4}{96} \Rightarrow i = 0,15$$

Άρα το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 15%.

2.4.2. Υπολογισμός της ονομαστικής αξίας όταν είναι γνωστή η παρούσα αξία

Εξωτερικώς

Από τη σχέση (12) αν λύσουμε ως προς K θα έχουμε:

$$A_1 = \frac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - \theta \cdot K - \varepsilon \cdot K - X \Rightarrow A_1 + X = \left(\frac{360 - \nu \cdot i}{360} - \theta - \varepsilon \right) \cdot K$$ οπότε τελικά:

$$K = \frac{A_1 + X}{\frac{360 - \nu \cdot i}{360} - \theta - \varepsilon}$$

(15)

Εσωτερικώς

Από τη σχέση (14) αν λύσουμε ως προς K θα βρούμε:

$$A_2 = \left(\frac{360}{360 + \nu \cdot i} - \theta - \varepsilon \right) \cdot K - X \Rightarrow A_2 + X = \left(\frac{360}{360 + \nu \cdot i} - \theta - \varepsilon \right) \cdot K$$

άρα τελικά βρίσκουμε:

$$K = \frac{A_2 + X}{\frac{360}{360 + \nu \cdot i} - \theta - \varepsilon} \qquad (16)$$

Παράδειγμα 20

Συναλλαγματική η οποία έληγε στις 28 Νοεμβρίου προεξοφλήθηκε στις 3 Απριλίου και μας έδωσε €1.455. Η τράπεζα εκτός από τους τόκους υπολόγισε προμήθεια 0,7%, εισπρακτικά 0,3% και χαρτόσημο €0,15. Αν το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση είναι 15% και το έτος εμπορικό να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής α)εξωτερικώς β)εσωτερικώς.

Λύση

Έχουμε: $\nu = 240$ (28 Απρίλιος + 31 Μάιος +30 Ιούνιος + 31 Ιούλιος + 31 Αύγουστος +30 Σεπτέμβριος + 31 Οκτώβριος + 28 Νοέμβριος = 240)

$i = 0{,}15$

$\theta = 0{,}7\% = 0{,}007$

$\varepsilon = 0{,}3\% = 0{,}003$

$X = 0{,}15$

Εξωτερικώς:

$A_1 = 1.455$

Από τη σχέση (15) έχουμε:

$$K = \frac{A_1 + X}{\frac{360 - \nu \cdot i}{360} - \theta - \varepsilon} \Rightarrow K = \frac{1.455 + 0{,}15}{\frac{360 - 240 \cdot 0{,}15}{360} - 0{,}007 - 0{,}003} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1.455{,}15}{0{,}9 - 0{,}01} \Rightarrow K = \frac{1.455{,}15}{0{,}89} \Rightarrow K = 1.635$$

Άρα η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής, αν αυτή προεξοφλήθηκε εξωτερικώς είναι €1.635.

Εσωτερικώς

$A_2 = 1.455$

Αν κάνουμε αντικατάσταση στη σχέση (16) θα έχουμε:

$$K = \frac{A_2 + X}{\frac{360}{360 + \nu \cdot i} - \theta - \varepsilon} \Rightarrow K = \frac{1.455 + 0{,}15}{\frac{360}{360 + 240 \cdot 0{,}15} - 0{,}007 - 0{,}003} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1.455{,}15}{0{,}909 - 0{,}01} \Rightarrow K = \frac{1.455{,}15}{0{,}899} \Rightarrow K = 1.618{,}46$$

Ενώ αν προεξοφληθεί εσωτερικώς η ονομαστική αξία είναι ίση με €1.618,46.

2.4.3. Πραγματικό επιτόκιο

Κατά την προεξόφληση λοιπόν μιας συναλλαγματικής σε κάποια τράπεζα, όπως φαίνεται από τα παραπάνω, από την ονομαστική αξία της θα μας αφαιρεθούν εκτός από τους τόκους που αναλογούν και τα υπόλοιπα έξοδα. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Τελικά ποια ήταν η επιβάρυνση σε μας όσον αφορά το επιτόκιο; Γιατί προφανώς οι κρατήσεις που είχαμε ήταν αρκετά μεγαλύτερες από το επιτόκιο i με το οποίο έγινε η προεξόφληση. Με άλλα λόγια με ποιο επιτόκιο θα έπρεπε να τοκίσουμε το ποσό που εισπράξαμε κατά την προεξόφληση (A) για το αντίστοιχο χρονικό διάστημα (ν ή μ ή n) ώστε στο τέλος να εισπράξουμε ποσό ίσο με τους τόκους που συνολικά κράτησε η τράπεζα; Το επιτόκιο αυτό το συμβολίζουμε με το γράμμα J και το ονομάζουμε πραγματικό επιτόκιο προεξόφλησης. Αν βέβαια έχουμε προεξόφληση χωρίς έξοδα εννοείται ότι το πραγματικό επιτόκιο είναι ίδιο με το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση. Σε κάθε άλλη περίπτωση (προεξόφληση με έξοδα) το πραγματικό επιτόκιο (J) είναι μεγαλύτερο από το επιτόκιο της προεξόφλησης (i) ($J > i$).

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω λοιπόν θα έχουμε:

$I = K - A = \dfrac{A \cdot \nu \cdot J}{360}$ ή αν λύσουμε ως προς J θα βρούμε:

$$360 \cdot (K - A) = A \cdot \nu \cdot J \Rightarrow$$

$$J = \frac{360 \cdot (K - A)}{A \cdot \nu} \tag{17}$$

που είναι ο τύπος που μας δίνει το πραγματικό επιτόκιο.

Παράδειγμα 21

Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας €3.000 προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 270 μέρες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 18%. Η τράπεζα κράτησε προμήθεια 1/12% κατά μήνα και για ολόκληρους μήνες, εισπρακτικά 0,5% και για χαρτόσημο 0,25% επί της ονομαστικής αξίας. Να βρεθεί το πραγματικό επιτόκιο της προεξόφλησης με έτος εμπορικό.

Λύση

Έχουμε: $K = 3.000$, $\nu = 270$, $i = 0{,}18$

$\theta = \left(\dfrac{1}{12} \times 9\right)\% = 0{,}0075$ (οι 270 μέρες είναι 9 μήνες)

$\varepsilon = 0{,}5\% = 0{,}005$

$X = 0{,}25\% = 0{,}0025$

$p = 0{,}0075 + 0{,}005 + 0{,}0025 = 0{,}015$

Από τη σχέση (13) βρίσκουμε: $A_1 = \dfrac{(360 - \nu \cdot i) \cdot K}{360} - p \cdot K \Rightarrow$

$$A_1 = \frac{(360 - 270 \cdot 0{,}18) \cdot 3.000}{360} - 0{,}015 \cdot 3.000$$

ή

$$A_1 = \frac{934.200}{360} - 45 \Rightarrow A_1 = 2.595 - 45 \Rightarrow A_1 = 2.550$$

Άρα η παρούσα αξία της συναλλαγματικής είναι ίση με €2.550.

Στη σχέση (17) κάνουμε αντικατάσταση και βρίσκουμε:

$$J = \frac{360 \cdot (K - A)}{A \cdot \nu} \Rightarrow J = \frac{360 \cdot (3.000 - 2.550)}{2.550 \cdot 270} \Rightarrow J = \frac{162.000}{688.500}$$

Οπότε τελικά βρίσκουμε ότι το πραγματικό επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση είναι: $J \simeq 0{,}24\%$.

2.5. Ασκήσεις

2.5.1 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Για την προεξόφληση μιας επιταγής ονομαστικής αξίας €3.000, 150 μέρες πριν από τη λήξη της, έχουμε δύο επιλογές: (α) Να την προεξοφλήσουμε χωρίς έξοδα με ετήσιο επιτόκιο 10% ή (β) Με έξοδα με ετήσιο επιτόκιο 8% και επίσης η τράπεζα θα κρατήσει προμήθεια 1/10% κατά μήνα και για ολόκληρους μήνες, εισπρακτικά 0,3% και τέλος χαρτόσημο €1. Να βρεθεί ποια από τις δύο επιλογές είναι πιο συμφέρουσα για τον πιστωτή. Προεξόφληση εξωτερική, έτος μικτό.

Λύση

Για την πρώτη περίπτωση έχουμε: $K = 3.000$, $\nu = 150$ και $i = 0{,}10$.

Άρα

$$A=\frac{K\cdot(360-\nu\cdot i)}{360}\Rightarrow A=\frac{3.000\cdot(360-150\cdot 0,1)}{360}\Rightarrow A=\frac{3.000\cdot 345}{360}$$

οπότε βρίσκουμε τελικά ότι ο πιστωτής αν προτιμήσει αυτήν την επιλογή θα εισπράξει €2.875.

Για τη δεύτερη περίπτωση έχουμε:

$\theta=\left(\frac{1}{10}\times 5\right)\%=\frac{1}{2}\%=0,005$ (5 μήνες οι 150 μέρες)

$$\varepsilon=0,3\%=0,003 \text{ και } X=1$$

Άρα $A=\frac{K\cdot(360-\nu\cdot i)}{360}-K\cdot\theta-K\cdot\varepsilon-X\Rightarrow$

$$A=\frac{3.000\cdot(360-150\cdot 0,08)}{360}-3.000\cdot 0,005-3.000-0,003-1\Rightarrow$$

$$A=2.900-15-9-1\Rightarrow A=2.875$$

οπότε βλέπουμε ότι όποια επιλογή και αν επιλέξει θα εισπράξει ακριβώς τα ίδια χρήματα.

Άσκηση 2

Τρεις συναλλαγματικές των οποίων οι ονομαστικές αξίες είναι ανάλογες των αριθμών 6,8 και 10 προεξοφλήθηκαν εξωτερικά και έδωσαν συνολικό προεξόφλημα €59,2. Η πρώτη συναλλαγματική προεξοφλήθηκε 120 μέρες πριν από τη λήξη της, η δεύτερη 180 μέρες και η τρίτη 80 μέρες αντίστοιχα. Αν το ετήσιο επιτόκιο της προεξόφλησης ήταν 10% και το έτος εμπορικό, να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των συναλλαγματικών.

Λύση

Έστω E_1, E_2, E_3 τα αντίστοιχα προεξοφλήματα των τριών συναλλαγματικών. Τότε θα ισχύει: $E_1+E_2+E_3=59,2$

$\nu_1=120, \nu_2=180, \nu_3=80$ και $i=0,10$.

Άρα

$$E_1+E_2+E_3=59,2\Rightarrow\frac{K_1\cdot\nu_1\cdot i}{360}+\frac{K_2\cdot\nu_2\cdot i}{360}+\frac{K_3\cdot\nu_3\cdot i}{360}=59,2$$

Επειδή οι ονομαστικές αξίες των συναλλαγματικών είναι ανάλογες των αριθμών 6,8 και 10 θα ισχύει:

$\frac{K_1}{6}=\frac{K_2}{8}=\frac{K_3}{10}$ ή ισοδύναμα: $K_1=6\cdot\lambda$, $K_2=8\cdot\lambda$ και $K_3=10\cdot\lambda$

Κάνουμε αντικατάσταση και έχουμε:

$$\frac{6\cdot\lambda\cdot 120\cdot 0,1}{360}+\frac{8\cdot\lambda\cdot 180\cdot 0,1}{360}+\frac{10\cdot\lambda\cdot 80\cdot 0,1}{360}=59,2\Rightarrow$$

$$\frac{72\cdot\lambda+144\cdot\lambda+80\cdot\lambda}{360}=59,2\Rightarrow\frac{296\cdot\lambda}{360}=59,2\Rightarrow\lambda=\frac{59,2\cdot 360}{296}$$

οπότε τελικά $\lambda=72$. Έτσι βρίσκουμε:

$$K_1=6\cdot\lambda\Rightarrow K_1=6\cdot 72=432$$

$$K_2=8\cdot\lambda\Rightarrow K_1=8\cdot 72=576$$

$$K_3=10\cdot\lambda\Rightarrow K_1=10\cdot 72=720$$

Άσκηση 3

Αν E_1 και E_2 είναι το εξωτερικό και το εσωτερικό αντίστοιχα προεξόφλημα του ίδιου τίτλου, να δειχθεί ότι η ονομαστική αξία του τίτλου είναι $K=\frac{E_1\cdot E_2}{E_1-E_2}$

Λύση

Από τη σχέση (2) έχουμε ότι: $E_1=\frac{K\cdot\nu\cdot i}{360}$ από την οποία προκύπτει επίσης ότι: $\frac{E_1}{K}=\frac{\nu\cdot i}{360}$.

Αντίστοιχα για την εσωτερική προεξόφληση έχουμε ότι: $E_2 = \dfrac{A_2 \cdot \nu \cdot i}{360}$ ξέρουμε όμως ότι ισχύει και $A_2 = K - E_2$. Κάνουμε αντικατάσταση και έχουμε: $E_2 = \dfrac{(K - E_2)\cdot \nu \cdot i}{360}$ ή $E_2 = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360} - \dfrac{E_2 \cdot \nu \cdot i}{360}$. Το πρώτο κλάσμα όμως του δευτέρου μέλους ισούται με E_1, ενώ το $\dfrac{\nu \cdot i}{360}$ όπως βρήκαμε ισούται με $\dfrac{E_1}{K}$. Κάνουμε λοιπόν αντικατάσταση και βρίσκουμε: $E_2 = E_1 - E_2 \cdot \dfrac{E_1}{K} \Rightarrow \dfrac{E_1 \cdot E_2}{K} = E_1 - E_2$ από όπου προκύπτει τελικά ότι: $K = \dfrac{E_1 \cdot E_2}{E_1 - E_2}$.

Θα μπορούσαμε βέβαια να ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέλος της ζητούμενης σχέσης και κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις (2) και (9) να βρίσκαμε:

$$\frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 - E_2} = \frac{\dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360} \cdot \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i}}{\dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360} - \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360 + \nu \cdot i}} = \frac{\dfrac{(K \cdot \nu \cdot i)^2}{360 \cdot (360 + \nu \cdot i)}}{K \cdot \nu \cdot i \cdot \left(\dfrac{1}{360} - \dfrac{1}{360 + \nu \cdot i}\right)}$$

κάνουμε απλοποιήσεις και βρίσκουμε:

$$\frac{\dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{360 \cdot (360 + \nu \cdot i)}}{\dfrac{360 + \nu \cdot i - 360}{360 \cdot \left(360 + \nu \cdot i\right)}} = \frac{K \cdot \nu \cdot i}{\nu \cdot i} = K.$$

Άσκηση 4

Συναλλαγματική προεξοφλείται στις 14 Ιουλίου με ετήσιο επιτόκιο 18,25% και δίνει προεξόφλημα ίσο με τα 25/1000 της ονομαστικής αξίας του γραμματίου. Να βρεθεί η ημερομηνία λήξης της συναλλαγματικής αν έχουμε εξωτερική προεξόφληση και έτος μικτό.

Λύση

Έχουμε: $i = 0{,}08$, $E_1 = \dfrac{25}{1000} \cdot K$.

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε: $E_1 = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{365} \Rightarrow \dfrac{25}{1000} \cdot K = \dfrac{K \cdot \nu \cdot i}{365}$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $K \neq 0$

$$\frac{25}{1.000} = \frac{\nu \cdot i}{365} \Rightarrow \nu = \frac{25 \cdot 365}{1.000 \cdot 0{,}1825} \Rightarrow \nu = 50$$

Άρα η συναλλαγματική λοιπόν είχε ημερομηνία λήξης την 1η Σεπτεμβρίου.

Άσκηση 5

Γραμμάτια ονομαστικής αξίας €1.200 και €1.700 λήγουν μετά από 180 και 680 μέρες αντίστοιχα. Πόσες μέρες πριν τη λήξη του πρώτου γραμματίου θα έχουν την ίδια παρούσα αξία; Ετήσιο επιτόκιο 18%, έτος μικτό.

Λύση

Έχουμε $K_1 = 1.200$, $K_2 = 1.700$, $i = 0{,}18$

Έστω A_1, A_2 οι παρούσες αξίες των δύο γραμματίων, τότε ισχύει:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow K_1 - E_1 = K_2 - E_2 \Rightarrow K_1 - \frac{K_1 \cdot \nu_1 \cdot i}{360} = K_2 - \frac{K_2 \cdot \nu_2 \cdot i}{360} \Rightarrow$$

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό των ημερών πριν από τη λήξη του πρώτου γραμματίου θα είναι:

$$1.200 - \frac{1.200 \cdot x \cdot 0{,}18}{360} = 1.700 - \frac{1.700 \cdot (560 + x) \cdot 0{,}18}{360} \Rightarrow$$

$$1.200-0,6\cdot x=1.700-476-0,85\cdot x \Rightarrow 0,25\cdot x=24 \Rightarrow x=96$$

Άρα 96 μέρες πριν τη λήξη του πρώτου γραμματίου θα έχουν την ίδια παρούσα αξία.

Άσκηση 6

Τέσσερις επιταγές των οποίων οι ονομαστικές αξίες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου προεξοφλούνται εξωτερικώς με ετήσιο επιτόκιο 10%. Αν ξέρουμε ότι το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των τεσσάρων επιταγών είναι €6.000, το συνολικό προεξόφλημα είναι €150 και οι λήξεις τους είναι μετά από 50,60,100 και 120 μέρες αντίστοιχα, να βρεθούν οι τέσσερις ονομαστικές αξίες. Έτος εμπορικό.

Λύση

Επειδή οι ονομαστικές αξίες των επιταγών είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου θα ισχύει ότι:

$$K_1=K-3\cdot\omega,\ K_2=K-\omega,\ K_3=K+\omega \text{ και } K_4=K+3\cdot\omega$$

Άρα $K_1+K_2+K_3+K_4=6.000 \Rightarrow$ κάνοντας αντικατάσταση

$$K-3\cdot\omega+K-\omega+K+\omega+K+3\cdot\omega=6.000 \Rightarrow 4\cdot K=6.000 \Rightarrow$$

$$K=1.500$$

Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα αντίστοιχα προεξοφλήματα των τεσσάρων επιταγών. Τότε θα έχουμε:

$E_1+E_2+E_3+E_4=150$

$$\frac{K_1\cdot\nu_1\cdot i}{360}+\frac{K_2\cdot\nu_2\cdot i}{360}+\frac{K_3\cdot\nu_3\cdot i}{360}+\frac{K_4\cdot\nu_4\cdot i}{360}=150 \Rightarrow$$

$$\frac{(1.500-3\cdot\omega)\cdot\nu_1\cdot i}{360}+\frac{(1.500-\omega)\cdot\nu_2\cdot i}{360}+\frac{(1.500+\omega)\cdot\nu_3\cdot i}{360}+\frac{(1.500+3\cdot\omega)\cdot\nu_4\cdot i}{360}=150 \Rightarrow$$

$$\frac{(1.500-3\cdot\omega)\cdot 50\cdot 0,1}{360}+\frac{(1.500-\omega)\cdot 60\cdot 0,1}{360}+\frac{(1.500+\omega)\cdot 100\cdot 0,1}{360}+\frac{(1.500+3\cdot\omega)\cdot 120\cdot 0,1}{360}=150 \Rightarrow$$

$$\frac{7.500-15\cdot\omega}{360}+\frac{9.000-6\cdot\omega}{360}+\frac{15.000+10\cdot\omega}{360}+\frac{18.000+36\cdot\omega}{360}=150$$

$$\frac{7.500-15\cdot\omega+9.000-6\cdot\omega+15.000+10\cdot\omega+18.000+36\cdot\omega}{360}=150$$

$$\frac{49.500+25\cdot\omega}{360}=150 \Rightarrow 25\cdot\omega=4.500 \Rightarrow \omega=180$$

Άρα οι ονομαστικές αξίες των επιταγών είναι αντίστοιχα:

$K_1=1.500-3\cdot 180 \Rightarrow K_1=960$

$K_2=1.500-180 \Rightarrow K_2=1.320$

$K_3=1.500+180 \Rightarrow K_2=1.680$

$K_4=1.500+3\cdot 180 \Rightarrow K_4=2.040$

Άσκηση 7

Συναλλαγματική προεξοφλείται εξωτερικώς στις 15 Ιουλίου με ετήσιο επιτόκιο 12% και μας δίνει παρούσα αξία €2.205. Αν την προεξοφλούσαμε 40 μέρες νωρίτερα θα μας έδινε €30 περισσότερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής καθώς και η ημερομηνία λήξης της. Έτος μικτό.

Λύση

Έχουμε: $i=0,12$, $E=800$

Για τις 40 επιπλέον μέρες έχουμε ότι $E'=30$, $\nu'=40$:

$$E'=30 \Rightarrow \frac{K\cdot\nu'\cdot i}{360}=30 \Rightarrow \frac{K\cdot 40\cdot 0,12}{360}=30 \Rightarrow 4,8\cdot K=10.800$$

Οπότε τελικά $K=2.250$, άρα και

$$E=K-A \Rightarrow E=2.250-2.205 \Rightarrow E=45$$

$$E=\frac{K\cdot\nu\cdot i}{360} \Rightarrow 45=\frac{2.250\cdot\nu\cdot 0,12}{360} \Rightarrow 270\cdot\nu=16.200 \Rightarrow \nu=60$$

Άρα η ημερομηνία λήξης της συναλλαγματικής είναι στις 2 Σεπτεμβρίου.

2.5.2 Άλυτες ασκήσεις

1. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας €17.010 προεξοφλήθηκε 200 μέρες πριν τη λήξη της και η διαφορά της εξωτερικής από την εσωτερική παρούσα αξία ήταν €54. Αν το επιτόκιο της εξωτερικής προεξόφλησης είναι 8% να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η εσωτερική προεξόφληση. Έτος μικτό. ($i_2 = 0,09$)
2. Τρία γραμμάτια ονομαστικής αξίας €120, €180 και €235 προεξοφλούνται εξωτερικώς μετά από 90, 100 και 120 μέρες πριν από τη λήξη τους αντίστοιχα, με ετήσιο επιτόκιο 12%. Να βρεθεί το συνολικό προεξόφλημα και η συνολική παρούσα αξία τους (έτος μικτό).($E_{ολ} = 19$, $A_{ολ} = 516$)
3. Επιταγή ονομαστικής αξίας €1.500 προεξοφλείται εξωτερικώς 4 μήνες πριν από τη λήξη της με ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθεί το προεξόφλημα και η παρούσα αξία της. ($E_1 = 40$, $A_1 = €1.460$)
4. Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €1.500, προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 200 μέρες πριν τη λήξη του και έδωσε παρούσα αξία €1.400. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση (έτος μικτό). ($i = 0,12$)
5. Συναλλαγματική η οποία λήγει στις 22 Αυγούστου προεξοφλήθηκε εσωτερικώς στις 15 Απριλίου με ετήσιο επιτόκιο 10% και έδωσε παρούσα αξία €1.056. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής αν έχουμε έτος πολιτικό. ($A_2 = €1.095$)
6. Συναλλαγματική προεξοφλείται εσωτερικά και εξωτερικά 400 μέρες πριν από τη λήξη της. Το εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα είναι ίσα μεταξύ τους και ίσα με €100. Αν το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης είναι 10%, να βρεθεί η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής, καθώς και το ισοδύναμο επιτόκιο της εξωτερικής προεξόφλησης. (Έτος μικτό.) ($K = €1.000$, $i = 0,09$)
7. Η παρούσα αξία μιας συναλλαγματικής η οποία προεξοφλήθηκε εξωτερικώς 90 μέρες πριν από τη λήξη της είναι ίση με το 95% της ονομαστικής της αξίας. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο έγινε η προεξόφληση. (20%)
8. Μετά από πόσες μέρες πρέπει να λήγει γραμμάτιο, το οποίο, όταν προεξοφληθεί εξωτερικώς με επιτόκιο 9% και εσωτερικώς με 10%, δίνει την ίδια παρούσα αξία; (400 μέρες)
9. Επιταγή ονομαστικής αξίας €1800 με ημερομηνία λήξης στις 21 Δεκεμβρίου, προεξοφλείται εξωτερικώς στις 23 Σεπτεμβρίου με προμήθεια $\theta = \frac{1}{10}\%$ κατά μήνα και για ολόκληρους μήνες και χαρτόσημο 0,3%. Αν το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 8% και το έτος μικτό, να βρεθεί η παρούσα αξία της επιταγής. ($A_1 = €1.751,4$)
10. Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €1.800 προεξοφλείται με επιτόκιο 10%. Μετά από πόσες μέρες πρέπει να λήγει το γραμμάτιο αν η διαφορά των προεξοφλημάτων είναι €20; Έτος εμπορικό. (400 μέρες)
11. Για την προεξόφληση μιας συναλλαγματικής 100 μέρες πριν τη λήξη της σε κάποια τράπεζα έχουμε δύο επιλογές. Να την προεξοφλήσουμε εξωτερικώς χωρίς έξοδα με επιτόκιο 12% ή με έξοδα εσωτερικώς και με επιτόκιο 8%. Σε αυτήν την περίπτωση η τράπεζα θα κρατήσει προμήθεια $\theta = \frac{1}{8}\%$ κατά μήνα και για ολόκληρους μήνες και χαρτόσημο 0,5%. Αν έχουμε έτος εμπορικό, να βρεθεί ποια από τις δύο επιλογές είναι πιο συμφέρουσα.
12. Δύο συναλλαγματικές προεξοφλήθηκαν εξωτερικώς με επιτόκιο 8%. Η πρώτη λήγει μετά από 100 μέρες και η δεύτερη μετά από 150 μέρες. Και οι δύο μαζί έδωσαν άθροισμα προεξοφλημάτων €100. Αν έχουμε έτος εμπορικό, να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των συναλλαγματικών, αν είναι γνωστό ότι η ονομαστική αξία της πρώτης είναι τα τρία πέμπτα της ονομαστικής αξίας της δεύτερης. ($K_1 = €1.080$, $K_2 = €1.800$)
13. Επιταγή λήξης στις 18 Οκτωβρίου και ονομαστικής αξίας €3.700, προεξοφλείται εσωτερικώς με επιτόκιο 10%, προμήθεια 3/5% , εισπρακτικά 1/5% και χαρτόσημο €0,40. Αν ο κομιστής

της επιταγής πήρε €3.620, να βρεθεί η ημερομηνία που έγινε η προεξόφληση. Έτος πολιτικό. (30 Αυγούστου)

14. Γραμμάτια ονομαστικής αξίας €900 και €1.000 που λήγουν μετά από 140 και 680 μέρες αντίστοιχα προεξοφλούνται εξωτερικώς. Αν το επιτόκιο της προεξόφλησης είναι 8% και το έτος εμπορικό να βρεθεί πόσες μέρες πριν τη λήξη του πρώτου γραμματίου θα έχουν την ίδια παρούσα αξία; ($\nu = 100$)
15. Ένας έμπορος είναι κομιστής μιας επιταγής αξίας €2.160 που θα πληρωθεί μετά 100 μέρες από σήμερα. Την επιταγή αυτή μπορεί να την προεξοφλήσει χωρίς έξοδα με επιτόκιο 0,16 ή με έξοδα, αλλά με επιτόκιο 0,12 και στην περίπτωση αυτή, θα υπολογισθούν ακόμη προμήθεια 1/10% κατά μήνα (και για ολόκληρους μήνες), εισπρακτικά 0,3% και λοιπά έξοδα €0,88. Αν έχουμε προεξόφληση εξωτερική και έτος πολιτικό, ποια προεξόφληση θα προτιμηθεί; (Απλή ή σύνθετη;). ($A = €2.064$, $A' = €2.072$, Σύνθετη)
16. Συναλλαγματική προεξοφλείται εξωτερικώς 8 μήνες πριν από τη λήξη της με επιτόκιο 10%. Να βρεθεί η ονομαστική της αξία αν η διαφορά εξωτερικού και εσωτερικού προεξοφλήματος είναι €12,5. ($K = €3.000$)
17. Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €600 προεξοφλείται ν ημέρες πριν τη λήξη του με επιτόκιο 10% και δίνει εξωτερικό προεξόφλημα ίσο με τα 6/5 του εσωτερικού. Να υπολογιστεί ο χρόνος προεξόφλησης, και τα προεξοφλήματα. ($\nu = 720$, $E_1 = €120$, $E_2 = €100$)
18. Συναλλαγματική ονομαστικής αξίας K , προεξοφλείται n χρόνια πριν από τη λήξη της. Αν θεωρήσουμε τη διαφορά $D = E_1 - E_2$ των δύο προεξοφλημάτων, να δειχθεί ότι α) η διαφορά D δίνεται από το τύπο $D = K \cdot \dfrac{(n \cdot i)^2}{1 + n \cdot i}$, β) η διαφορά D είναι το εσωτερικό προεξόφλημα του εξωτερικού προεξοφλήματος, γ) η διαφορά D είναι το εξωτερικό προεξόφλημα του εσωτερικού προεξοφλήματος, δ) όταν μια τράπεζα προεξοφλεί με εξωτερική προεξόφληση (και όχι με εσωτερική) ένα τίτλο που λήγει σε ν ημέρες, το ποσοστό των χρημάτων που οφείλεται είναι $\varepsilon = \dfrac{\nu}{\Delta + \nu}$ όπου $\Delta = \dfrac{360}{i}$.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 3

3. Ισοδυναμία γραμματίων

3.1. Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα της προεξόφλησης, έστω ότι κάποιος αγοράζει σήμερα εμπορεύματα αξίας €2.200 για τα οποία υπογράφει συναλλαγματική η οποία λήγει σε 150 ημέρες από σήμερα. Ας υποθέσουμε ότι το έτος είναι μικτό και το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης 20%. Είναι προφανές ότι η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής θα είναι μεγαλύτερη από τη σημερινή αξία της (παρούσα αξία).

Έστω $A = 2.200$ η παρούσα αξία της συναλλαγματικής και έστω K η ονομαστική αξία τότε η σχέση μεταξύ παρούσας και ονομαστικής αξίας στην εξωτερική προεξόφληση χωρίς έξοδα είναι:

$$A_1 + E_1 = K \Rightarrow A_1 + \frac{K\nu i}{360} = K \Rightarrow A_1 = K - \frac{K\nu i}{360}$$

$$A_1 = K\left(1 - \frac{\nu i}{360}\right) \Rightarrow K = \frac{360A}{360 - \nu i}$$

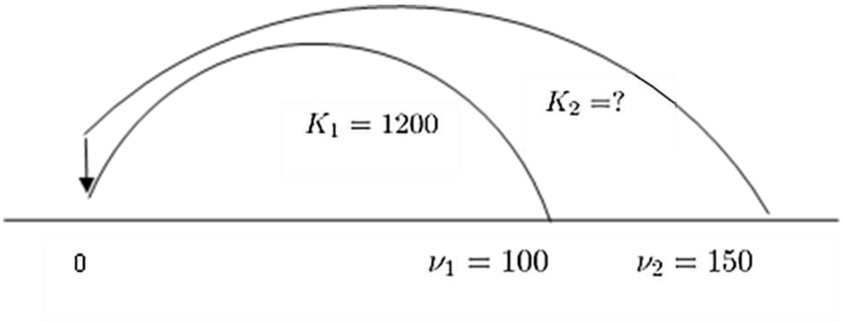
Δηλαδή η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής είναι:

$$K = \frac{360A}{360 - \nu i} = \frac{360 \cdot 2200}{360 - 150 \cdot 0,20} = 2.400$$

Μπορεί δηλαδή να πληρώσει σε 150 ημέρες αλλά θα πληρώσει €2.400.

Τα ποσά €2.200 και €2.400 δεν είναι ίδια αλλά είναι οικονομικά ισοδύναμα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι θέλουμε να πληρώσουμε σε δύο συναλλαγματικές με λήξεις σε 100 και 150 ημέρες από σήμερα (Σχήμα 3.1), ας θεωρήσουμε ότι η ονομαστική αξία της πρώτης συναλλαγματικής είναι €1.200. Εδώ το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των δύο συναλλαγματικών θα είναι μεγαλύτερο από €2.200 άρα η ονομαστική αξία της δεύτερης συναλλαγματικής θα είναι μεγαλύτερη από €1.000.



Σχήμα 3.1 *Δύο συναλλαγματικές με λήξεις σε 100 και 150 ημέρες.*

Έστω K_1, K_2 οι ονοματικές αξίες των δύο συναλλαγματικών, θα πρέπει οι παρούσες αξίες τους να έχουν άθροισμα €2.200.

Δηλαδή

$$K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} = 2.200 \Rightarrow$$

$$K_2\left(1 - \frac{\nu_2 i}{360}\right) = 2.200 - 1.200 + \frac{1.200 \cdot 100 \cdot 0,20}{360} \Rightarrow$$

$$K_2 \frac{11}{12} = 1.000 + \frac{200}{3} \Rightarrow K_2 = 1.163,64$$

Η ονομαστική αξία της δεύτερης συναλλαγματικής είναι €1.163,64 και το άθροισμα των δύο ονομαστικών αξιών είναι €2.363,64 μικρότερο από €2.400 που βρήκαμε προηγούμενα. Αυτό είναι λογικό και αναμενόμενο αφού η πρώτη συναλλαγματική πληρώνεται 50 ημέρες πριν τη δεύτερη.

Αν θέλουμε οι συναλλαγματικές να είναι ισόποσες δηλ. $K_1 = K_2 = K$ έχουμε

$$\left(K - \frac{K\nu_1 i}{360}\right) + \left(K - \frac{K\nu_2 i}{360}\right) = 2.200 \Rightarrow$$

$$2K - K\frac{(\nu_1 + \nu_2)i}{360} = 2.200 \Rightarrow$$

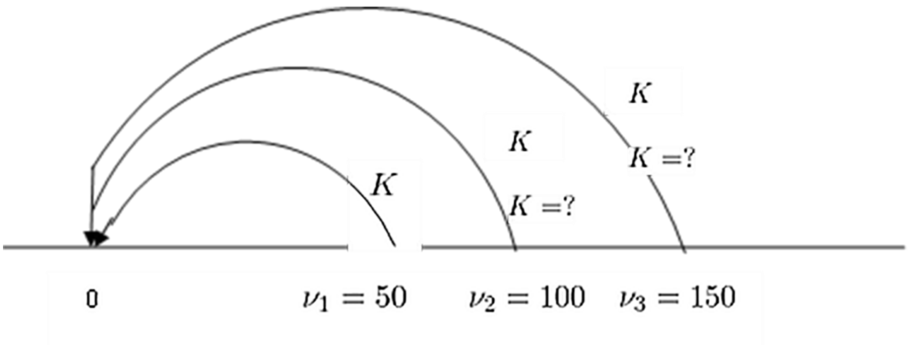
$$K\left(2 - \frac{(\nu_1 + \nu_2)i}{360}\right) = 2.200 \Rightarrow$$

$$K\left(2 - \frac{250 \cdot 0,20}{360}\right) = 2.200 \Rightarrow K = 1.182,10$$

Δηλαδή το ποσό κάθε δόσης είναι €1.182,10.

Συνολικά θα πληρώσει €2.364,20. Περίπου όσα και στην προηγούμενη περίπτωση.

Αντίστοιχα θα μπορούσε να ζητήσει να πληρώσει το ποσό με τρεις ισόποσες συναλλαγματικές οι οποίες να λήγουν σε 50, 100 και 150 ημέρες από σήμερα (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 *Τρεις ισόποσες συναλλαγματικές με λήξεις σε 50, 100 και 150 ημέρες*

Μια συνηθισμένη συναλλαγή στα καταστήματα με ηλεκτρικά είδη είναι να αγοράσουμε μια ηλεκτρική συσκευή (π.χ. ψυγείο) και να την πληρώσουμε με 6 ή 8 ή 12 ισόποσες δόσεις.

Θέλουμε δηλαδή να μοιράσουμε ένα ποσό *K* σε συναλλαγματικές με ονομαστικές αξίες

$$K_1,\ K_2, \ldots,\ K_k$$

και λήξη σε

$$\nu_1,\ \nu_2, \ldots,\ \nu_k$$

ημέρες από σήμερα η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + \cdots + K_k - \frac{K_k\nu_k i}{360} \tag{1}$$

ή

$$K = K_1 + K_2 + \cdots + K_k - \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_k\nu_k\right)\frac{i}{360}$$

ή

$$K = \sum_{j=1}^{k} K_j - \left(\sum_{j=1}^{k} K_j \cdot \nu_j\right)\frac{\nu \cdot i}{360}$$

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς οποιαδήποτε παράμετρο.

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πως κάποιος μπορεί να πληρώσει την αγορά κάποιου είδους με ίσες μηνιαίες δόσεις, κάτι που συμβαίνει πολύ συχνά στην πράξη.

Παράδειγμα 1

Αγοράζει κάποιος μια ηλεκτρική κουζίνα αξίας €1.200 και υπογράφει έξι ισόποσες συναλλαγματικές οι οποίες λήγουν ανά μήνα με πρώτη δόση σε 1 μήνα από σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία κάθε συναλλαγματικής. (Σχήμα 3.3)

Λύση

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

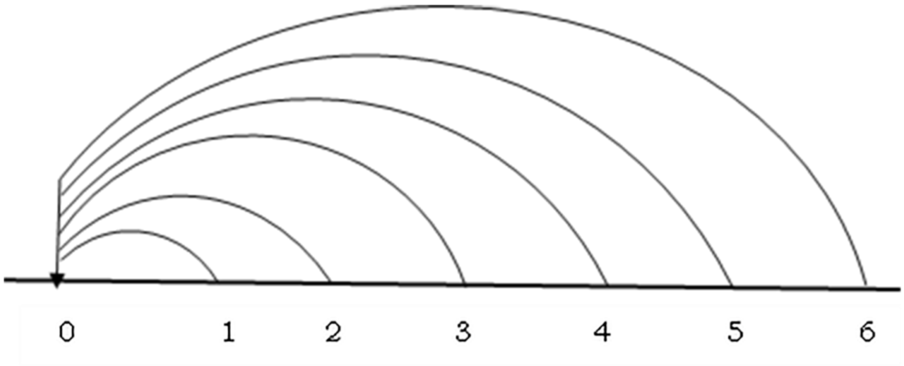
$$K = K_1 - \frac{K_1 \mu_1 i}{12} + K_2 - \frac{K_2 \mu_2 i}{12} + \cdots + K_6 - \frac{K_6 \mu_6 i}{12}$$

έστω X η ονομαστική αξία κάθε συναλλαγματικής τότε

$$K = 6X - X(1 + 2 + \cdots + 6)\frac{i}{12} \Rightarrow$$

$$K = 6X - 0,42X \Rightarrow X = 215,05$$

Άρα η ονομαστική αξία κάθε συναλλαγματικής θα είναι €215. Δηλαδή ο αγοραστής θα πληρώσει επιπλέον €90.



Σχήμα 3.3 *Έξι συναλλαγματικές*

Παρατηρήσεις.

Γενικά αν έχουμε k ισόποσες συναλλαγματικές και X η ονομαστική αξία κάθε συναλλαγματικής (δηλαδή $K_1 = K_2 = \cdots = K_k = X$), τότε η εξίσωση ισοδυναμίας (1) γράφεται:

$$K = kX - X\left(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k\right)\frac{i}{360} \tag{2}$$

ή

$$K = kX - X\left(\sum_{j=1}^{k} \nu_j\right)\frac{i}{360}$$

άρα η ονομαστική αξία κάθε συναλλαγματικής είναι:

$$X = \frac{360K}{360k - i\left(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k\right)}$$

Αν έχουμε ότι οι συναλλαγματικές λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα έστω ν τότε οι λήξεις των συναλλαγματικών θα ήταν

$$\nu_1 = \nu,\ \nu_2 = 2\nu,\ \nu_3 = 3\nu, \ldots,\ \nu_k = k\nu$$

και η εξίσωση ισοδυναμίας (1) γράφεται:

$$K = K_1 + K_2 + \cdots + K_k - \left(K_1 + 2K_2 + 3K_3 \cdots + kK_k\right)\frac{\nu\, i}{360} \tag{3}$$

ή

$$K=\sum_{j=1}^{k}K_j-\left(\sum_{j=1}^{k}j\cdot K_j\right)\frac{\nu\cdot i}{360}$$

Στην περίπτωση που έχουμε ισόποσες συναλλαγματικές οι οποίες λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα τότε η εξίσωση ισοδυναμίας (3) γράφεται:

$$K=kX-X\left(1+2+\cdots+k\right)\frac{\nu i}{360}$$

ή

$$K=k\cdot X-X\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}j\right)\cdot\frac{\nu\cdot i}{360}$$

ή

$$K=k\cdot X-X\cdot\frac{k\left(k+1\right)}{2}\cdot\frac{\nu\cdot i}{360}$$

από όπου προκύπτει το ποσό κάθε δόσης

$$X=\frac{720K}{720k-k(k+1)\nu i}$$

Αφού λάβαμε υπόψη το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{k}i=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Αντίστοιχα αν γνωρίζουμε το ποσό της δόσης μπορούμε να υπολογίσουμε τις λήξεις λύνοντας την εξίσωση ισοδυναμίας ως προς ν

$$\nu=\frac{K-kX}{Xk(k+1)}\frac{720}{i}$$

Παράδειγμα 2

Έστω έμπορος ο οποίος αγοράζει από προμηθευτή εμπορεύματα συνολικής αξίας €5.000 ευρώ και υπογράφει πέντε συναλλαγματικές οι οποίες να λήγουν ανά 30 ημέρες από σήμερα. Έστω ότι οι τέσσερις πρώτες συναλλαγματικές έχουν ονομαστική αξία €1.000 η κάθε μία. Να βρεθεί η ονομαστική αξία της πέμπτης συναλλαγματικής. Επιτόκιο 10%.

Λύση

Έχουμε:

$$\nu_1=30,\ \nu_2=60,\ \nu_3=90,\ \nu_4=120,\ \nu_5=150$$

και

$$K_1=K_2=K_3=K_4=1.000$$

και ζητάμε την αξία της τελευταίας (5ης) συναλλαγματικής.

Η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$K=K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{360}+K_2-\frac{K_2\nu_2 i}{360}+K_3-\frac{K_3\nu_3 i}{360}+K_4-\frac{K_4\nu_4 i}{360}+K_5-\frac{K_5\nu_5 i}{360}$$

ή

$$K=4A-A\left(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\right)\frac{i}{360}+K_5-\frac{K_5\nu_5 i}{360}\Rightarrow$$

$$K-4A+A\left(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\right)\frac{i}{360}=K_5-\frac{K_5\nu_5 i}{360}\Rightarrow$$

$$K-4A+A\left(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\right)\frac{i}{360}=K_5\left(1-\frac{\nu_5 i}{360}\right)\Rightarrow$$

$$K_5\left(1-\frac{150\cdot i}{360}\right)=5.000-4.000+1.000\cdot\frac{450}{360}i\Rightarrow$$

$$K_5\left(360-150\cdot i\right)=\left(360+450\cdot i\right)\cdot 1000\Rightarrow$$

$$K_5 = \frac{360+450\cdot i}{360-150\cdot i}\cdot 1000 = 1.173,91$$

Παράδειγμα 3

Καταναλωτής αγοράζει σήμερα (20 Μαΐου) από κάποιο πολυκατάστημα προϊόντα αξίας €1.500, θέλει να δώσει κάποιο ποσό για προκαταβολή και το υπόλοιπο ποσό να το εξοφλήσει με τέσσερις συναλλαγματικές ονοματικής αξίας €300 οι οποίες θα λήγουν στις 25 Ιουνίου, στις 15 Αυγούστου, στις 15 Οκτωβρίου και στις 20 Δεκεμβρίου του ίδιου έτους. Να βρεθεί το ποσό το οποίο πρέπει να πληρώσει για προκαταβολή. Έτος μικτό, επιτόκιο 12%.

Λύση

Θα βρούμε τις ημέρες από τη σημερινή ημερομηνία έως τις λήξεις των συναλλαγματικών από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών. Έχουμε

20 Μαΐου → 140,
25 Ιουνίου → 176: 20 Μαΐου - 15 Ιουνίου → ν1=176-140=36,
14 Αυγούστου → 226: 20 Μαΐου - 14 Αυγούστου → ν2=226-140=86,
15 Οκτωβρίου → 288: 20 Μαΐου - 15 Οκτωβρίου → ν3=288-140=88,
20 Δεκεμβρίου → 354: 20 Μαΐου - 20 Δεκεμβρίου → ν4=354-140=214.

Το άθροισμα των αξιών των συναλλαγματικών αυτών στις 20 Μαΐου θα είναι

$$X = K_1 - \frac{K_1\cdot v_1\cdot i}{360} + K_2 - \frac{K_2\cdot v_2\cdot i}{360} + K_3 - \frac{K_3\cdot v_3\cdot i}{360} + K_4 - \frac{K_4\cdot v_4\cdot i}{360}$$

ή

$$X = \left(K_1+K_2+K_3+K_4\right) - \left(K_1v_1+K_2v_2+K_3v_3+K_4v_4\right)\frac{i}{360}$$

με

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 300$$

αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$X = 1.200 - 300\cdot\left(36+86+148+214\right)\cdot\frac{0,12}{360} \Rightarrow$$

$$X = 1.200 - 300\cdot 484\cdot\frac{1}{3000} \Rightarrow$$

$$X = 1.200 - 48,40 \Rightarrow X = 1.151,60$$

Δηλαδή η αξία των τεσσάρων συναλλαγματικών σήμερα είναι €1.151,60.
Άρα πρέπει να πληρώσει 1.500–1.151,60=€348,40.

Παράδειγμα 4

Καταναλωτής αγοράζει σήμερα (20 Μαΐου) από κάποιο πολυκατάστημα προϊόντα αξίας €1.000. Θέλει να ξεπληρώσει το χρέος του, με πέντε συναλλαγματικές ονοματικής αξίας €207 η καθεμία, οι οποίες θα λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα, χωρίς να πληρώσει για προκαταβολή. Πότε πρέπει να γίνουν οι πληρωμές; Έτος μικτό, επιτόκιο 12%.

Λύση

Θέλουμε να βρούμε τις ημερομηνίες λήξης των πέντε συναλλαγματικών. Αν η πρώτη λήγει σε v ημέρες από σήμερα η δεύτερη θα λήγει σε $2v$ ημέρες από σήμερα και οι επόμενες σε $3v$, $4v$, $5v$ ημέρες.

Το άθροισμα των αξιών των συναλλαγματικών αυτών στις 20/05 είναι ίσο με €1.000. Δηλαδή,

$$K_1 - \frac{K_1\cdot v_1\cdot i}{360} + K_2 - \frac{K_2\cdot v_2\cdot i}{360} + K_3 - \frac{K_3\cdot v_3\cdot i}{360} + K_4 - \frac{K_4\cdot v_4\cdot i}{360} + K_5 - \frac{K_5\cdot v_4\cdot i}{360} = 1.000$$

με

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = 207$$

και

$$v_1 = v,\ v_2 = 2v,\ v_3 = 3v,\ v_4 = 4v,\ v_5 = 5v$$

άρα

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu+2\nu+3\nu+4\nu+5\nu=15\nu$$

αντικαθιστούμε στην εξίσωση ισοδυναμίας και έχουμε:

$$1.035-207\cdot 15\cdot \nu\cdot \frac{0,12}{360}=1.000$$

$$1,035\cdot \nu=35\Rightarrow \nu=33,82$$

μπορούμε να λάβουμε τον πλησιέστερο ακέραιο άρα $\nu=34$ ημέρες.

Επομένως οι συναλλαγματικές λήγουν στις ακόλουθες ημερομηνίες όπως προκύπτουν από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών 1.2 και φαίνονται στον πίνακα 3.1.

		Ημέρες από 20 Μαΐου		**Ημέρες από την αρχή του έτους**		**Λήξεις**
1η		ν1=34		140+34 =174		23 Ιουνίου
2η		ν2=2ν=68		140+68 =208		27 Ιουλίου
3η		ν3=3ν=102		140+102=242		30 Αυγούστου
4η		ν4=4ν=136		140+136=276		3 Οκτωβρίου
5η		ν5=5ν=170		140+170=310		6 Νοεμβρίου

Πίνακας 3.1 *Λήξης γραμματίων.*

3.2. Αντικατάσταση γραμματίων με ενιαίο γραμμάτιο.

3.2.1. Εύρεση της ονομαστικής του ενιαίου γραμματίου.

Θα ξεκινήσουμε με δύο απλά παραδείγματα όπου αντικαθιστούμε δύο γραμμάτια με ένα.

Παράδειγμα 5

Έστω ότι κάποιος έμπορος έχει υπογράψει δύο γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K_1=2.000$ και $K_2=1.500$ ευρώ τα οποία λήγουν σε $\nu_1=50$, $\nu_2=75$ ημέρες από σήμερα. Επιθυμεί να πληρώσει σήμερα την εξόφληση των δύο γραμματίων. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να πληρώσει; Επιτόκιο 9%, έτος πολιτικό.

Λύση

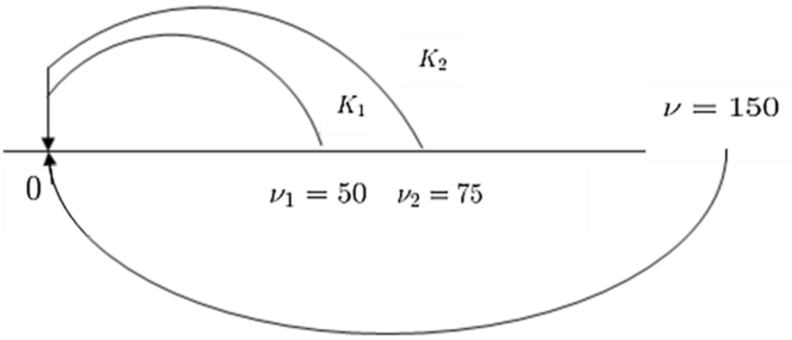
Έστω K η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Γνωρίζουμε την ονομαστική αξία των δύο γραμματίων τα οποία θέλουμε να αντικαταστήσουμε, θα πρέπει να βρούμε τις παρούσες αξίες τους σήμερα και να τις προσθέσουμε.

$$K=\left(K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{365}\right)+\left(K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{365}\right)=$$

$$=K_1+K_2-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2\right)\frac{0,09}{365}=3.447,60$$

Παράδειγμα 6

Έστω ότι κάποιος έμπορος έχει υπογράψει δύο γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K_1=2.000$ και $K_2=1.500$ ευρώ τα οποία λήγουν σε $\nu_1=50$, $\nu_2=75$ ημέρες από σήμερα. Καθώς δυσκολεύεται να τα πληρώσει επιθυμεί να τα αντικαταστήσει με ένα γραμμάτιο το οποίο λήγει σε $\nu_1=150$ ημέρες από σήμερα. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα αντικατάστασης, επιτόκιο 9%, έτος πολιτικό βλέπε (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4 *Γραμμάτια τους παραδείγματος 6.*

Λύση

$$K-\frac{K\cdot\nu\cdot i}{365}=K_1-\frac{K_1\cdot\nu_1\cdot i}{365}+K_2-\frac{K_2\cdot\nu_2\cdot i}{365}\Rightarrow$$
$$K\left(\frac{365-\nu\cdot i}{365}\right)=K_1+K_2-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2\right)\frac{i}{365}\Rightarrow$$
$$K\left(365-\nu\cdot i\right)=365\left(K_1+K_2\right)-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2\right)\cdot i\Rightarrow$$
$$K=\frac{365\left(K_1+K_2\right)-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2\right)\cdot i}{\left(365-\nu\cdot i\right)}$$

Ο παραπάνω τύπος μας δίνει την ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και έχουμε

$$K=\frac{365\left(2.000+1.500\right)-\left(2.000\cdot 50+1.500\cdot 75\right)\cdot 0,09}{\left(365-150\cdot 0,09\right)}\approx 3.580,01$$

Παρατήρηση.

Μπορούμε επίσης να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση ισοδυναμίας και ως εξής (όπου $\Delta=365/i$ ή $\Delta=360/i$ ανάλογα με το αν το έτος θεωρείται πολιτικό ή μικτό)

$$K-\frac{K\cdot\nu}{\Delta}=K_1-\frac{K_1\cdot\nu_1}{\Delta}+K_2-\frac{K_2\cdot\nu_2}{\Delta}\Rightarrow$$
$$K\left(\Delta-\nu\right)=\left(K_1+K_2\right)\Delta-\left(K_1\cdot\nu_1+K_1\cdot\nu_1\right)\Rightarrow$$
$$K=\frac{\left(K_1+K_2\right)\Delta-\left(K_1\cdot\nu_1+K_1\cdot\nu_1\right)}{\Delta-\nu}$$

Ανάλογα, αν είχαμε να αντικαταστήσουμε περισσότερα από δύο γραμμάτια έστω P το πλήθος, ο τύπος που μας δίνει την ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου είναι:

$$K=\frac{\left(K_1+K_2+\cdots K_p\right)\Delta-\left(K_1\cdot\nu_1+K_1\cdot\nu_1+\cdots+K_p\cdot\nu_p\right)}{\Delta-\nu}$$

ή

$$K=\frac{\Delta\sum_{j=1}^{p}K_j-\sum_{j=1}^{p}K_j\nu_j}{\Delta-\nu} \qquad (4)$$

Στο παράδειγμα αυτό θεωρήσαμε ότι τα γραμμάτια είναι ισοδύναμα τη χρονική στιγμή της αντικατάστασης. Θα εξετάσουμε κατά πόσο θα άλλαζε το αποτέλεσμα αν τα γραμμάτια θεωρηθούν ισοδύναμα την ημερομηνία λήξης του ενιαίου γραμματίου που καλείται και κοινή λήξη.

Τότε από την εποχή ισοδυναμίας έως τη λήξη του πρώτου γραμματίου έχουμε $t_1=\nu-\nu_1=150-50=100$ ημέρες, και από την εποχή ισοδυναμίας έως τη λήξη του δεύτερου γραμματίου έχουμε $t_2=\nu-\nu_2=150-75=75$ ημέρες.

$$K = K_1 + \frac{K_1 \cdot t_1 \cdot i}{365} + K_2 + \frac{K_2 \cdot t_2 \cdot i}{365} \Rightarrow$$

$$K = K_1 + K_2 + \left(K_1 \cdot t_1 + K_2 \cdot t_2\right)\frac{i}{365}$$

ή

$$K = K_1 + K_2 + \frac{K_1\left(\nu - \nu_1\right) + K_2\left(\nu - \nu_2\right)}{\Delta}$$

αν τώρα στον τελευταίο τύπο αντικαταστήσουμε τα δεδομένα του παραδείγματος 6 έχουμε:

$$K = 3.500 + \frac{3.125 \cdot 9}{365} = 3.577{,}05$$

Στην περίπτωση που εποχή ισοδυναμίας είναι η ημέρα υπολογισμού, βρέθηκε ότι η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου είναι €3.577,05. Η διαφορά είναι πολύ μικρή ίση με €2,95.

Το γενικό πρόβλημα της αντικατάστασης γραμματίων με ενιαίο γραμμάτιο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να αντικατασταθούν ρ γραμμάτια με ονομαστικές αξίες $K_1 + K_2 + \cdots K_p$ και λήξεις $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού με ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας K με λήξη ν ημέρες από την ημέρα υπολογισμού όταν εποχή ισοδυναμίας απέχει N ημέρες από την ημέρα υπολογισμού.

Τότε η εποχή ισοδυναμίας απέχει $\nu - N$ από τη λήξη του ενιαίου γραμματίου και $\nu_j - N$ ημέρες από τη λήξη του κάθε γραμματίου προς αντικατάσταση.

Η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$K - \frac{K\left(\nu - N\right)}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1\left(\nu_1 - N\right)}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2\left(\nu_2 - N\right)}{\Delta} + \cdots + K_p - \frac{K_p\left(\nu_p - N\right)}{\Delta}$$

ή

$$K - \frac{K\left(\nu - N\right)}{\Delta} = \sum_{j=1}^{p}\left(K_j - \frac{K_j\left(\nu_j - N\right)}{\Delta}\right) \Rightarrow$$

$$K\frac{\Delta - \nu + N}{\Delta} = \sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j\left(\nu_j - N\right) \Rightarrow$$

$$K = \frac{\Delta\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j\left(\nu_j - N\right)}{\Delta - \nu + N}$$

συνεπώς η ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{\Delta\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j\left(\nu_j - N\right)}{\Delta - \nu + N}$$

ή

$$K = \frac{\left(\Delta + N\right)\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j}{\Delta - \nu + N} \tag{5}$$

γιατί:

$$\sum_{j=1}^{p} K_j\left(\nu_j - N\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(K_j \nu_j - K_j N\right) = \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j - \sum_{j=1}^{p} K_j N = \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j - N\sum_{j=1}^{p} K_j$$

Ειδική Περίπτωση 1

Τώρα μπορούμε να δούμε σαν ειδικές περιπτώσεις της σχέσης (5) σχετικά με την εποχή ισοδυναμίας.

- $N = 0$ (εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού)

$$K=\frac{\Delta\sum_{j=1}^{p}K_j-\sum_{j=1}^{p}K_j\nu_j}{\Delta-\nu}$$

αυτή είναι η σχέση (4).

- $N=\nu$ (εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη)

$$K=\frac{\left(\Delta+N\right)\sum_{j=1}^{p}K_j-\sum_{j=1}^{p}K_j\nu_j}{\Delta}$$

Ειδική περίπτωση 2.

Αν οι ονομαστικές αξίες των προς αντικατάσταση γραμματίων είναι ανάλογες των αριθμών $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$.

Έστω

$$\frac{K_1}{\lambda_1}=\frac{K_2}{\lambda_2}=\cdots=\frac{K_p}{\lambda_p}=X$$

τότε

$$K_1=\lambda_1 X\ ,\ K_2=\lambda_2 X\ ,\ \ldots,\ K_p=\lambda_p X$$

και

$$\sum_{j=1}^{p}K_j=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j X=X\sum_{j=1}^{p}\lambda_j$$

και

$$\sum_{j=1}^{p}K_j\nu_j=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\nu_j X=X\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\nu_j$$

αντικαθιστούμε στην γενική εξίσωση ισοδυναμίας

$$K=\frac{X}{\Delta-\nu+N}\left(\left(\Delta+N\right)\sum_{j=1}^{p}\lambda_j-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\nu_j\right)$$

Ειδική περίπτωση 3.

Αν οι ονομαστικές αξίες των προς αντικατάσταση γραμματίων είναι ίσες.

Έστω

$$K_1=K_2=\cdots=K_p=X$$

τότε

$$\sum_{j=1}^{p}K_j=\sum_{j=1}^{p}X=p\cdot X$$

και

$$\sum_{j=1}^{p}K_j\nu_j=\sum_{j=1}^{p}X\cdot\nu_j=X\sum_{j=1}^{p}\nu_j$$

αντικαθιστούμε στη γενική εξίσωση ισοδυναμίας

$$K=\frac{X}{\Delta-\nu+N}\left(\left(\Delta+N\right)p-\sum_{j=1}^{p}\nu_j\right)$$

Σημειώνεται ότι πρόκειται για ειδική περίπτωση της προηγούμενης με $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=1$.

Επιπλέον, για εποχή ισοδυναμίας ίση με:

- την ημέρα υπολογισμού (δηλ. $N=0$)

$$K=\frac{X}{\Delta-\nu}\left(\Delta\, p-\sum_{j=1}^{p}\nu_j\right)$$

- την κοινή λήξη (δηλ. $N=\nu$)

$$K=\frac{X}{\Delta}\left(\left(\Delta+\nu\right)p-\sum_{j=1}^{p}\nu_j\right)$$

Παράδειγμα 7

Έστω ότι κάποιος έμπορος έχει υπογράψει τρία γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K_1=1.000$, $K_2=1.500$ και $K_3=1.000$ ευρώ τα οποία λήγουν στις 15 Ιουλίου, στις 15 Αυγούστου και στις 15 Σεπτεμβρίου. Καθώς δυσκολεύεται να τα πληρώσει επιθυμεί να τα αντικαταστήσει με ένα γραμμάτιο το οποίο λήγει στις 31 Δεκεμβρίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα αντικατάστασης (5 Ιουνίου), επιτόκιο 9%, έτος πολιτικό.

Λύση

Θα πρέπει να υπολογίσουμε από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών πόσες ημέρες είναι μεταξύ της σημερινής ημερομηνίας 5 Ιουνίου και των ημερομηνιών λήξης των γραμματίων.

5 Ιουνίου → 156,
15 Ιουλίου → 196,
15 Αυγούστου → 227,
15 Σεπτεμβρίου → 258,
31 Δεκεμβρίου → 365.

5 Ιουνίου – 15 Ιουλίου: ν1=196-156=40,
5 Ιουνίου – 15 Αυγούστου: ν2=227-156=71,
5 Ιουνίου – 15 Σεπτεμβρίου: ν3=258-156=102,
5 Ιουνίου – 15 Δεκεμβρίου: ν4=365-156=209.

η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K-\frac{K\nu i}{365}=K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{365}+K_2-\frac{K_2\nu_2 i}{365}+K_3-\frac{K_3\nu_3 i}{365}\Rightarrow$$

$$K\left(1-\frac{\nu i}{365}\right)=K_1+K_2+K_3-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2+K_3\nu_3\right)\frac{i}{365}\ \Rightarrow$$

$$0,9485\cdot K=3.500-61,27\ \Rightarrow K=3.625,57$$

Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (1):

$$K=\frac{\Delta\sum_{j=1}^{3}K_j-\sum_{j=1}^{3}K_j\nu_j}{\Delta-\nu}$$

να βρούμε τα δύο αθροίσματα (Πίνακας 3.2):

j	K	ν_j	$K_j\nu_j$
1	1.000	40	40.000
2	1.500	71	106.500
3	1.000	102	102.000
$\sum_{j=1}^{3}$	3.500		248.500

Πίνακας 3.2

και να αντικαταστήσουμε:

$$K=\frac{4.055,56\cdot 3.500-248.500}{4.055,56-209}=3.625,57$$

Παράδειγμα 8

Ο έμπορος «Χ» δε μπορεί να πληρώσει γραμμάτιο το οποίο λήγει στις 16 Μαρτίου και το αντικαθιστά την 1η Μαρτίου με την αποδοχή των εξής γραμματίων: €5.000 λήξης 15 Απριλίου, € 7.000 λήξης 16 Μαΐου και €10.000 λήξης 31 Μαΐου. Ποια ήταν η ονομαστική αξία του γραμματίου αυτού, αν έχουμε επιτόκιο 0.12, έτος μικτό, προεξόφληση εξωτερική και ημέρα υπολογισμού την κοινή λήξη;

Λύση

Οι αντίστοιχες ημέρες από την 1η του έτους είναι:

1 Μαρτίου → 60,
16 Μαρτίου → 75,
15 Απριλίου → 105,
16 Μαΐου → 134,
31 Μαΐου → 151.

και αντιστοιχούν στις εξής ημέρες από την ημέρα υπολογισμού (1 Μαρτίου):

1 Μαρτίου – 16 Μαρτίου: ν=75-60=15,
1 Μαρτίου – 15 Απριλίου: ν1=105-60=45,
1 Μαρτίου – 16 Μαΐου: ν2=134-60=74,
1 Μαρτίου – 31 Μαΐου: ν3=151-60=91.

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K-\frac{K\nu i}{360}=K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{360}+K_2-\frac{K_2\nu_2 i}{360}+K_3-\frac{K_3\nu_3 i}{360}\Rightarrow$$

$$K\left(1-\frac{\nu i}{360}\right)=K_1+K_2+K_3-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2+K_3\nu_3\right)\frac{i}{360}\Rightarrow$$

$$K\left(1-\frac{14}{3.000}\right)=22.000-\frac{1.653.000}{3.000}\Rightarrow$$

$$K\frac{2.985}{3.000}=22.000-551\Rightarrow 0,995K=21.449\Rightarrow K=21.556,78$$

Παράδειγμα 9

Καταναλωτής έχει υπογράψει ισόποσα γραμμάτια ονομαστικής αξίας €500 σε ένα πολυκατάστημα για την αγορά ηλεκτρικών συσκευών με λήξεις την 1η κάθε μήνα. Σήμερα στις 20 Μαΐου απομένουν πέντε γραμμάτια τα οποία θέλει να εξοφλήσει. Να βρεθεί το ποσό το οποίο θα πληρώσει. Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, έτος πολιτικό και επιτόκιο 10%.

Λύση

Τα γραμμάτια λήγουν την 1η Ιουνίου, την 1η Ιουλίου, την 1η Αυγούστου, την 1η Σεπτεμβρίου και την 1η Οκτωβρίου. Οι ημερομηνίες αυτές αντιστοιχούν σε 152, 182, 213, 244 και 274 ημέρες από την 1η του έτους. Η εποχή ισοδυναμίας (20 Μαΐου) απέχει 140 ημέρες από την 1η του έτους. Επομένως έχουμε:

$$\nu_1=152-140=12$$

$$\nu_2=182-140=42$$

$$\nu_3=213-140=73$$

$$\nu_4=244-140=104$$

$$\nu_5=274-140=134$$

και $\nu=0$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$K=\frac{X}{\Delta-\nu}\left(\Delta\, p-\sum_{j=1}^{p}\nu_j\right)$$

Οι ονομαστικές αξίες είναι ίσες $X = 500$, το πλήθος των γραμματίων είναι $p = 5$ και $\Delta = 365 / i = 3650$ και

$$\sum_{j=1}^{p} \nu_j = 12 + 42 + 73 + 104 + 134 = 365 .$$

Συνεπώς θα πληρώσει:

$$K = \frac{\Delta\, pX - X\sum_{j=1}^{p}\nu_j}{\Delta - \nu} = \frac{500 \cdot \left(3.650 \cdot 5 - 365\right)}{3.650} = 2.450$$

3.2.2. Εύρεση της λήξης του ενιαίου γραμματίου

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που γνωρίζουμε την ονομαστική αξία και τις λήξεις των γραμματίων προς αντικατάσταση αλλά και την ονομαστική αξία του ενιαίου γραμματίου και ζητάμε τη λήξη του ενιαίου γραμματίου. Από τη γενική εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε:

$$K\left(\Delta - \nu + N\right) = \left(\Delta + N\right)\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j$$

και λύνουμε ως προς ν :

$$\nu = \left(\Delta + N\right) - \left(\Delta + N\right)\frac{\sum_{j=1}^{p} K_j}{K} + \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j}{K} \tag{6}$$

Παράδειγμα 10

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας $K = 1.200$ αντικαθιστά σήμερα 20 Ιουνίου δυο γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K = 600$ και $K = 580$ που λήγουν στις 8 Αυγούστου και στις 18 Σεπτεμβρίου αντίστοιχα. Ποια θα είναι η λήξη του γραμματίου αν το επιτόκιο είναι 12%, το έτος μικτό και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών σε ποια ημέρα από την αρχή του έτους αντιστοιχούν οι 20 Ιουνίου, 15 Αυγούστου και 10 Σεπτεμβρίου.

20 Ιουνίου → 171,
8 Αυγούστου → 220,
18 Σεπτεμβρίου → 261.

Εποχή ισοδυναμίας είναι η κοινή λήξη δηλαδή στις 20 Ιουνίου, υπολογίζουμε πόσες ημέρες απέχουν από αυτήν οι άλλες ημερομηνίες, και έχουμε:

20 Ιουνίου - ?? ??????: ν=??,
20 Ιουνίου - 8 Αυγούστου: ν1=220-171=49,
20 Ιουνίου – 18 Σεπτεμβρίου: ν2=261-171=90.

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360}$$

την οποία θα λύσουμε ως προς ν , άρα

$$\frac{K\nu i}{360} = K - K_1 - K_2 + \frac{K_1\nu_1 i}{360} + \frac{K_2\nu_2 i}{360} \Rightarrow$$

$$K\nu = \frac{360}{i}\left(K - K_1 - K_2\right) + \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2\right) \Rightarrow K\nu = \frac{360}{0,12}\left(1.200 - 600 - 580\right) + \left(600 \cdot 49 + 580 \cdot 90\right) \Rightarrow$$

$$1.200\nu = 141.600 \Rightarrow \nu = \frac{141.600}{1.200} = 118$$

Η λήξη του ενιαίου γραμματίου πρέπει να είναι 118 ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας δηλαδή 171+118 = 289 ημέρες από την αρχή του έτους δηλαδή στις 16 Οκτωβρίου.

Θα μπορούσαμε επίσης να είχαμε αντικαταστήσει στη σχέση (1)

$$K_1 + K_2 = 1.180 \text{ και } K_1\nu_1 + K_2\nu_2 = 81.600$$

$$\Delta = 360 / i = 3.000 \text{ και } N = 0$$

και πάλι βρίσκουμε:

$$\nu = 3.000 - 3.000\frac{1.180}{1.200} + \frac{81.600}{1.200} = 118$$

Παράδειγμα 11

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας $K = 1000$ αντικαθιστά δυο γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K_1 = 400$ και $K_2 = 600$ που λήγουν σε 60 και 100 ημέρες από σήμερα. Ποια θα είναι η λήξη του ενιαίου γραμματίου αν το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης είναι 12% και το έτος μικτό;

Λύση

Έστω $\nu_1 = 60,\ \nu_2 = 100$ οι λήξεις των δύο γραμματίων και ν ημέρες από σήμερα η λήξη του ενιαίου γραμματίου, τότε η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360}$$

εδώ ισχύει $K = K_1 + K_2$ τα οποία απλοποιούνται από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης και έχουμε:

$$-\frac{K\nu i}{360} = -\frac{K_1\nu_1 i}{360} - \frac{K_2\nu_2 i}{360} \quad \Rightarrow$$

$$K\nu\frac{i}{360} = (K_1\nu_1 + K_2\nu_2)\frac{i}{360}$$

από την τελευταία εξίσωση απλοποιείται το κλάσμα $i / 360$ και έχουμε

$$K\nu = K_1\nu_1 + K_2\nu_2 \Rightarrow \nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}{K}$$

στην οποία αντικαθιστούμε τα γνωστά και έχουμε:

$$\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}{K} = \frac{400\cdot 60 + 600\cdot 100}{1.000} = \frac{84.000}{1.000} = 84$$

Δηλαδή, σε 84 ημέρες από σήμερα.

Κατά τη λύση του προβλήματος δεν χρειάστηκε το επιτόκιο και το αν το έτος είναι μικτό ή πολιτικό γιατί απλοποιήθηκε το κλάσμα $i / 360$.

Το πρόβλημα αυτό είναι η εύρεση της μέσης λήξης p γραμματίων. Το οποίο διατυπώνεται γενικά ως εξής:

Να βρεθεί η κοινή λήξη ρ γραμματίων με ονομαστικές αξίες $K_1, K_2, \cdots, K_p$ και λήξεις $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού.

Ισχύει

$$K = \sum_{j=1}^{p} K_j$$

αντικαθιστούμε στη σχέση (6)

$$\nu = \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j}{K} \quad \text{ή} \quad \nu = \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j}{\sum_{j=1}^{p} K_j}$$

$$\text{ή} \quad \nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_p\nu_p}{K_1 + K_2 + \cdots + K_p}$$

Στο παράδειγμα παρατηρούμε ότι η μέση λήξη είναι ανάμεσα στις λήξεις των δύο προς αντικατάσταση γραμματίων, πραγματικά $\nu_1 < \nu < \nu_2$. Επίσης το 84 βρίσκεται πιο κοντά στο 100 από ότι στο 60 αυτό γιατί η ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου είναι μεγαλύτερη από την ονομαστική αξία του πρώτου. Λύστε το παραπάνω πρόβλημα με $K_1 = 800$ και $K_2 = 200$, τι παρατηρείτε;

Πραγματικά αν τα ν είναι διατεταγμένα $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_p$ ισχύει $\nu_1 < \nu < \nu_p$, θα αποδείξουμε το $\nu_1 < \nu$ γράφοντας μια σειρά από ισοδύναμες ανισώσεις

$$\nu_1 < \nu \Leftrightarrow \nu < \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_p\nu_p}{K_1 + K_2 + \cdots + K_p} \Leftrightarrow$$

$$\left(K_1 + K_2 + \cdots + K_p\right)\nu_1 < K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_p\nu_p \Leftrightarrow$$

$$K_1\nu_1 + K_2\nu_1 + \cdots + K_p\nu_1 < K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + \cdots + K_p\nu_p \Leftrightarrow$$

$$K_2\nu_1 + \cdots + K_p\nu_1 < K_2\nu_2 + \cdots + K_p\nu_p \Leftrightarrow$$

$$K_2\left(\nu_2 - \nu_1\right) + \cdots + K_p\left(\nu_p - \nu_1\right) > 0$$

η τελευταία ισχύει αφού όλα τα $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_p$ είναι μεγαλύτερα από το ν_1 (και συνεπώς όλες οι παρενθέσεις θετικοί αριθμοί). Όμοια αποδεικνύεται ότι $\nu < \nu_p$.

Παράδειγμα 12

Δύο γραμμάτια ονομαστικής αξίας *K* το καθένα λήγουν μετά από 60 και 100 ημέρες. Τα γραμμάτια αντικαθίστανται με ενιαίο γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 2*K*. Πότε πρέπει να λήγει το ενιαίο γραμμάτιο;

Διαφορετικά το πρόβλημα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί η μέση λήξη δύο γραμματίων ίσης ονομαστικής αξίας τα οποία λήγουν σε 60 και 100 ημέρες από σήμερα.

Λύση

Η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$2K - \frac{2K\nu i}{360} = K - \frac{K\nu_1 i}{360} + K - \frac{K\nu_2 i}{360} \Rightarrow$$

$$2K\nu\frac{i}{360} = K(\nu_1 + \nu_2)\frac{i}{360} \Rightarrow \nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $\nu = 80$, δηλαδή ακριβώς στη μέση των λήξεων των δύο γραμματίων.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε στον τύπο της μέσης λήξης δύο γραμματίων $K_1 = K_2$, δηλαδή

$$\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}{K_1 + K_2} = \frac{K\nu_1 + K\nu_2}{2K} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί η μέση λήξη *ρ* γραμματίων με ίσες ονομαστικές αξίες και λήξεις $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_p$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού.

Αφού $K_1 = K_2 = \cdots = K_p = X$ το ενιαίο γραμμάτιο έχει ονομαστική αξία

$$K = K_1 + K_2 + \cdots + K_p = pX$$

αλλά και

$$\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j = \sum_{j=1}^{p} X\nu_j = X\sum_{j=1}^{p}\nu_j$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της μέσης λήξης και έχουμε:

$$\nu = \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j}{\sum_{j=1}^{p} K_j} = \frac{X\sum_{j=1}^{p} \nu_j}{pX} = \frac{\sum_{j=1}^{p} \nu_j}{p}$$

ή

$$\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p}{p}$$

Δηλαδή αν τα γραμμάτια έχουν ίσες ονομαστικές αξίες η μέση λήξη δίνεται σαν ο μέσος όρος των $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_p$.

Παράδειγμα 13

Να βρεθεί η μέση λήξη τριών γραμματίων που λήγουν σε 30, 60 και 120 ημέρες αντίστοιχα, αν οι ονομαστικές τους αξίες είναι αντίστοιχα ανάλογες με τους αριθμούς 6, 4 και 3 και το έτος μικτό.

Λύση

Οι ονομαστικές τους αξίες $K_1,\ K_2,\ K_3$ είναι ανάλογες με τους αριθμούς 6, 4, 3 άρα ισχύει

$$\frac{K_1}{6} = \frac{K_2}{4} = \frac{K_3}{3} = \mathrm{X}$$

έστω ότι κάθε τέτοιο πηλίκο είναι ίσο με Χ.

Διαφορετικά μπορούσαμε να πούμε ότι οι ονομαστικές αξίες είναι ανάλογες κάποιου ποσού Χ και να γράψουμε

$$K_1 = 6X, \quad K_2 = 4X, \quad K_3 = 3X$$

Επίσης ζητάμε τη μέση λήξη άρα ισχύει:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = 6X + 4X + 3X = 13X$$

Η εξίσωση μέσης λήξης γράφεται:

$$\nu = \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3}{K_1 + K_2 + K_3} = \frac{6X\nu_1 + 4X\nu_2 + 3X\nu_3}{6X + 4X + 3X} =$$

$$= \frac{6\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3}{6+4+3} = \frac{6\nu_1 + 4\nu_2 + 3\nu_3}{13} =$$

$$= \frac{6\cdot 30 + 4\cdot 60 + 3\cdot 120}{13} = \frac{780}{13} = 60$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί η μέση λήξη *ρ* γραμματίων με ονομαστικές αξίες ανάλογες των αριθμών $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_p$ και λήξεις $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_p$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού.

Για τις ονομαστικές αξίες ισχύει

$$\frac{K_1}{\lambda_1} = \frac{K_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{K_p}{\lambda_p} = \mathrm{X}$$

τότε

$$K_1 = \lambda_1 X,\ K_2 = \lambda_2 X, \cdots,\ K_p = \lambda_p X$$

και

$$\sum_{j=1}^{p} K_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j X = X\sum_{j=1}^{p} \lambda_j$$

και

$$\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j X \nu_j = X\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nu_j$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο της μέσης λήξης και έχουμε

$$\nu = \frac{\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j}{\sum_{j=1}^{p} K_j} = \frac{X \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nu_j}{X \sum_{j=1}^{p} \lambda_j} = \frac{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nu_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}$$

3.2.3. Εύρεση του επιτοκίου στην αντικατάσταση

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που γνωρίζουμε όλα τα μεγέθη στην εξίσωση ισοδυναμίας και ζητάμε το επιτόκιο με το οποίο έγινε η αντικατάσταση. Από τη γενική έχουμε:

$$K\Delta - K(\nu - N) = \Delta \sum_{j=1}^{p} K_j + N \sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j \Rightarrow$$

$$\Delta\left(K - \sum_{j=1}^{p} K_j\right) = K(\nu - N) + N \sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j \Rightarrow$$

$$\Delta = \frac{K(\nu - N) + N \sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j}{K - \sum_{j=1}^{p} K_j}$$

και αφού $\Delta = 360 / i$

$$i = \frac{K - \sum_{j=1}^{p} K_j}{K(\nu - N) + N \sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j} \cdot 360$$

Αν έχουμε εποχή ισοδυναμίας ίση με:

- την ημέρα αντικατάστασης ($N = 0$) έχουμε

$$i = \frac{K - \sum_{j=1}^{p} K_j}{K\nu - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j} \cdot 360$$

- την κοινή λήξη $N = \nu$ έχουμε

$$i = \frac{K - \sum_{j=1}^{p} K_j}{\nu \sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j} \cdot 360$$

Παράδειγμα 14

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €2000 που λήγει μετά από 40 ημέρες αντικαθίσταται με τρία γραμμάτια ονομαστικών αξιών €520, €600 και €900 που λήγουν μετά από 30, 50 και 70 ημέρες από σήμερα αντίστοιχα. Να ευρεθεί το επιτόκιο αντικατάστασης. Έτος μικτό και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

Λύση

Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

$$K = 2.000,\ \nu = 40,\ K \cdot \nu = 80.000$$
$$K_1 = 520,\ \nu_1 = 30,\ K_1 \cdot \nu_1 = 15.600$$
$$K_2 = 600,\ \nu_1 = 50,\ K_2 \cdot \nu_2 = 30.000$$
$$K_3 = 900,\ \nu_3 = 70,\ K_3 \cdot \nu_3 = 63.000$$

$$\sum_{j=1}^{3} K_j = 520 + 600 + 900 = 2.020$$

$$\sum_{j=1}^{3} K_j \nu_j = 108.600$$

η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$i = \frac{K - (K_1 + K_2 + K_3)}{K\nu - (K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3)} \cdot 360$$

Αν δεν θυμόμαστε τον τύπο που δίνει το μέσο επιτόκιο γράφουμε την εξίσωση ισοδυναμίας για το συγκεκριμένο πρόβλημα και καταλήγουμε σε αυτόν.

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360} \Rightarrow$$

$$\left[K\nu - \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)\right]\frac{i}{360} = K - \left(K_1 + K_2 + K_3\right)$$

$$i = \frac{K - \left(K_1 + K_2 + K_3\right)}{K\nu - \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)} \cdot 360 = 0,2517$$

Το επιτόκιο είναι 25%.

Παράδειγμα 15

Ένας έμπορος που οφείλει δυο γραμμάτια €1.500 που λήγει στις 4 Μαΐου και €1.700 που λήγει στις 3 Σεπτεμβρίου τα αντικαθιστά στις 10 Απριλίου με ένα γραμμάτιο €3.180 που λήγει στις 15 Ιουνίου. Με ποιο κοινό επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης έγινε η αντικατάσταση, αν το έτος είναι μικτό και εποχή ισοδυναμίας η 26η Μαΐου.

Λύση

Οι ημέρες από την αρχή του έτους βρίσκονται από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών:

4 Μαΐου → 124,
26 Μαΐου → 146,
15 Ιουνίου → 166,
3 Σεπτεμβρίου → 246.

οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων είναι:

$$K = 3.180 \quad \nu = 166 - 146 = 20 \quad K \cdot \nu = 63.600$$

$$K_1 = 1.500 \quad \nu_1 = 146 - 124 = 22 \quad K_1 \cdot \nu_1 = 33.000$$

$$K_2 = 1.700 \quad \nu_2 = 246 - 146 = 100 \quad K_2 \cdot \nu_2 = 170.000$$

Η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 + \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} \Rightarrow$$

$$\left[K\nu + (K_1\nu_1 - K_2\nu_2)\right]\frac{i}{360} = K - (K_1 + K_2) \Rightarrow$$

$$i = \frac{K - (K_1 + K_2)}{K\nu + (K_1\nu_1 - K_2\nu_2)} \cdot 360 \Rightarrow$$

$$i = \frac{7.200}{73.400} = 0,098 = 9,8\%$$

Το επιτόκιο είναι 9,8%.

3.2.4. Εύρεση της ονομαστικής αξίας ενός από τα προς αντικατάσταση γραμματίου

Παράδειγμα 16

Οφείλει κάποιος γραμμάτιο €3.000, που λήγει 40 ημέρες από σήμερα. Αντί αυτού μεταβιβάζει δύο γραμμάτια ονομαστικών αξιών €800 και €1.000, που λήγουν αντίστοιχα μετά από 50 και 80 ημέρες και για το υπόλοιπο υπογράφει συναλλαγματική λήξης 30 ημερών. Ποια η ονομαστική αξία της συναλλαγματικής αυτής, αν το επιτόκιο είναι 0,12, το έτος μικτό, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας: α) η ημέρα υπολογισμού β) η κοινή λήξη.

Λύση

α). Εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού τότε θα είχαμε

$$K = 3.000, \quad \nu = 40,$$

$$K_1 = \;??\;, \quad \nu_1 = 30$$

$$K_2 = 800, \quad \nu_2 = 50,$$

$$K_3 = 1.000, \quad \nu_3 = 80,$$

η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360}$$

λύνουμε ως προς την άγνωστη ονομαστική αξία του πρώτου γραμματίου:

$$K_1\left(1 - \frac{\nu_1 i}{360}\right) = K - K_2 - K_3 + \left(-K\nu + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)\frac{i}{360} \Rightarrow$$

$$K_1\left(1 - \frac{30}{3.000}\right) = 1.200 \Rightarrow$$

$$K_1 0,99 = 1.200 \Rightarrow K_1 = 1.212,12$$

β). Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη τότε θα είχαμε

$$K = 3.000, \quad \nu = 0,$$

$$K_1 = \;??\;, \quad \nu_1 = -10$$

$$K_2 = 800, \quad \nu_2 = 10,$$

$$K_3 = 1.000, \quad \nu_3 = 40,$$

και εξίσωση ισοδυναμίας

$$K = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360} \Rightarrow$$

$$K - K_2 - K_3 + \left(K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right)\frac{i}{360} = K_1\left(1 - \frac{\nu_1 i}{360}\right) \Rightarrow$$

$$K_1\left(1 + \frac{10}{3.000}\right) = 1.200 + \frac{48.000}{3.000} \Rightarrow$$

$$K_1 1,00\overline{3} = 1.216 \Rightarrow K_1 = 1.212$$

Παράδειγμα 17

Έμπορος πρέπει να πληρώσει στις 10 Ιουλίου ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €15.000 και σε αντικατάσταση του υπογράφει τα εξής γραμμάτια: α) €4.500 λήξης 30 Ιουνίου, β) €6.000 λήξης 9 Αυγούστου και γ) ένα άλλο ακόμα λήξης 8 Οκτωβρίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του τρίτου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 0,08, το έτος μικτό, η προεξόφληση εξωτερική και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Λύση

Αντιστοιχία ονομαστικών αξιών γραμματίων και λήξης, ημέρες από την αρχή του έτους, ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας (κοινή λήξη):

K=15.000, 10 Ιουλίου → 191 → ν=0,
K1=4.500, 30 Ιουνίου → 181 → ν1=181-191=-10,
K2=6.000, 9 Αυγούστου → 221 → ν2=221-191=30,
K3= ? , 8 Οκτωβρίου → 281 → ν3=281-191=90.

Εξίσωση ισοδυναμίας

$$K = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360}$$

θα λύσουμε ως προς την ονομαστική αξία του τρίτου γραμματίου

$$K_3\left(1 - \frac{\nu_3 i}{360}\right) = K - K_1 - K_2 + \left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2\right)\frac{i}{360} \Rightarrow$$

$$K_3\left(1 - \frac{90 \cdot 0,08}{360}\right) = 4.530 \Rightarrow$$

$$K_3 0,98 = 4.530 \Rightarrow K_1 = 4.622,45$$

3.2.5. Εύρεση της λήξης ενός από τα προς αντικατάσταση γραμματίου

Παράδειγμα 18

Ένας έμπορος οφείλει ποσό που πρέπει να πληρωθεί στις 20 Ιουνίου. Έναντι της οφειλής του υπογράφει δυο γραμμάτια ίσα με το 1/2 του ποσού, που το πρώτο λήγει στις 15 Απριλίου. Πότε λήγει το δεύτερο γραμμάτιο, αν το επιτόκιο είναι 16%, το έτος μικτό και εποχή ισοδυναμίας η 20η Ιουνίου.

Λύση

Το γραμμάτιο που λήγει στις 15 Απριλίου αντιστοιχεί σε 105 ημέρες από την 1η του έτους, ενώ το γραμμάτιο που λήγει στις 20 Ιουνίου αντιστοιχεί σε 171 ημέρες από την 1η του έτους. Η λήξη του ενιαίου γραμματίου συμπίπτει με την εποχή ισοδυναμίας άρα $\nu = 0$, ενώ το πρώτο γραμμάτιο αντιστοιχεί σε $\nu_1 = 66$ ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας. Έστω ν_2 ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας έως τη λήξη του δεύτερου γραμματίου.

Τότε η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$K = K_1 + K_1\nu_1\frac{i}{360} + K_2 - K_2\nu_2\frac{i}{360} \Rightarrow$$

$$\nu_2 = \nu_1 \Rightarrow \nu_2 = 66$$

Δηλαδή 66 ημέρες μετά την εποχή ισοδυναμίας

171+66=237 και από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών προκύπτει ότι το δεύτερο γραμμάτιο πρέπει να λήγει στις 25 Αυγούστου.

Παράδειγμα 19

Οφείλει κάποιος στις 10 Αυγούστου ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €1.800 και για την εξόφληση του υπογράφει στις 20 Ιουλίου τα ακόλουθα γραμμάτια: α) €700 που λήγει στις 5 Αυγούστου β) €600 που λήγει στις 10 Σεπτεμβρίου και γ) €800. Να ευρεθεί η λήξη του γραμματίου, όταν το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης είναι 24%, το έτος μικτό και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Λύση

Από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών οι ημερομηνίες αναφέρονται στις εξής ημέρες από την 1η του έτους:

20 Ιουλίου → 201,
5 Αυγούστου → 217,
10 Αυγούστου → 222,
10 Σεπτεμβρίου → 253.

$$\begin{array}{rrr} K = 1.800 & \nu = 222 - 201 = 21 & K\nu = 37.800 \\ K_1 = 700 & \nu_1 = 217 - 201 = 16 & K_1\nu_1 = 11.200 \\ K_2 = 600 & \nu_2 = 253 - 201 = 42 & K_2\nu_2 = 25.200 \\ K_3 = 600 & \nu_3 = ?? \;\; - 201 = ... & K_3\nu_3 = ... \end{array}$$

η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$K - \frac{K\nu i}{360} = K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360} \Rightarrow$$

$$K_3\nu_3 = (K_1 + K_2 + K_3 - K)\frac{360}{i} + \left(K\nu - K_1\nu_1 - K_2\nu_2\right) \Rightarrow$$

$$K_3\nu_3 = \frac{36.000}{0,24} + 1.400 \Rightarrow \nu_3 = 252$$

Έχουμε λοιπόν 252 ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας άρα 252+201=453 από την αρχή του έτους και συνεπώς 453-365=88 ημέρες από την αρχή του επόμενου έτους. Δηλαδή στις 29 Μαρτίου του επόμενου έτους.

3.2.6. Αντικατάσταση γραμματίων

Το γενικό πρόβλημα της αντικατάστασης *p* γραμματίων με *q* γραμμάτια μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Να αντικατασταθούν *p* γραμμάτια με ονομαστικές αξίες $K_1, K_2, \cdots, K_p$ και λήξεις $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_p$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού με *q* γραμμάτια με ονομαστικές αξίες $X_1, X_2, \ldots, X_q$ και λήξεις $n_1, n_2, \ldots, n_q$ ημέρες από την ημέρα υπολογισμού.

Η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$\left(K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360}\right) + \cdots + \left(K_p - \frac{K_p\nu_p i}{360}\right) =$$

$$= \left(X_1 - \frac{X_1 n_1 i}{360}\right) + \left(X_2 - \frac{X_2 n_2 i}{360}\right) + \cdots + \left(X_p - \frac{X_p n_p i}{360}\right)$$

ή

$$\left(K_1 - \frac{K_1\nu_1}{\Delta}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2\nu_2}{\Delta}\right) + \cdots + \left(K_p - \frac{K_p\nu_p}{\Delta}\right) =$$

$$= \left(X_1 - \frac{X_1 n_1}{\Delta}\right) + \left(X_2 - \frac{X_2 n_2}{\Delta}\right) + \cdots + \left(X_p - \frac{X_p n_p}{\Delta}\right)$$

ή

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j = \sum_{j=1}^{q} X_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X_j n_j$$

Ειδική Περίπτωση 1

Αν είναι να αντικατασταθούν με ισόποσα γραμμάτια έχουμε

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_q = X$$

και η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j = \sum_{j=1}^{q} X - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X n_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j = qX - \frac{X}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} n_j$$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε την κοινή ονομαστική αξία X

$$\Delta\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j = X\left(\Delta q - \sum_{j=1}^{q} n_j\right) \Rightarrow X = \frac{\Delta\sum_{j=1}^{p} K_j - \sum_{j=1}^{p} K_j\nu_j}{\left(\Delta q - \sum_{j=1}^{q} n_j\right)}$$

Ειδική Περίπτωση 2

Αν λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα

$$n_1,\ n_1 + n,\ n_1 + 2n,\ \ldots,\ n_1 + (q-1)n$$

και η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = \sum_{j=1}^{q} X_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X_j \left(n_1 + (j-1)n\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = \sum_{j=1}^{q} X_j - \frac{n_1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X_j - \frac{n}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X_j (j-1)$$

Ειδική Περίπτωση 3
Αν λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα

$$n_1,\ n_1 + n,\ n_1 + 2n,\ \ldots,\ n_1 + (q-1)n$$

και είναι να αντικατασταθούν με ισόποσα γραμμάτια $X_1 = X_2 = \cdots = X_q = X$
και η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = \sum_{j=1}^{q} X - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} X \left(n_1 + (j-1)n\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = qX - \frac{n_1}{\Delta} qX - \frac{n}{\Delta} X \sum_{j=1}^{q} (j-1) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = X\left(q - \frac{n_1}{\Delta} q - \frac{nq(q-1)}{2\Delta}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{p} K_j - \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{p} K_j \nu_j = Xq\,\frac{2\Delta - 2n_1 - n(q-1)}{2\Delta}$$

Από την τελευταία σχέση μπορούμε να βρούμε είτε το *X* είτε το *n*.

Παράδειγμα 20

Κάποιος έχει υπογράψει δυο γραμμάτια ονομαστικής αξίας €3000 και €5000 τα οποία λήγουν στις 31 Μαΐου και 31 Αυγούστου. Εμφανίζεται στον κομιστή την 1η Μαΐου (εποχή ισοδυναμίας) και του ζητά να πληρώσει με ισόποσα μηνιαία γραμμάτια που θα λήγουν στο τέλος κάθε μήνα από αυτό το μήνα έως και τον Δεκέμβριο του ίδιου έτους. Να βρεθεί η ονομαστική αξία των γραμματίων.

Λύση

Έστω $K_1 = 3000$ και $K_2 = 5000$ τα οποία θα αντικατασταθούν. Τα γραμμάτια που θα τα αντικαταστήσουν είναι 8 και έστω *X* η ονοματική τους.

$$\left(K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360}\right) = \left(X_1 - \frac{X_1 n_1 i}{360}\right) + \left(X_2 - \frac{X_2 n_2 i}{360}\right) + \cdots + \left(X_8 - \frac{X_8 n_8 i}{360}\right) \Rightarrow$$

$$\left(K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360}\right) = \left(X - \frac{X n_1 i}{360}\right) + \left(X - \frac{X n_2 i}{360}\right) + \cdots + \left(X - \frac{X n_8 i}{360}\right) \Rightarrow$$

ή

$$\left(K_1 - \frac{K_1\nu_1}{\Delta}\right) + \left(K_2 - \frac{K_2\nu_2}{\Delta}\right) = 8X - \frac{X}{\Delta}\left(n_1 + n_2 + \cdots + n_8\right)$$

ή

$$K_1 + K_2 - \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2}{\Delta} = X\left(8 - \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_8}{\Delta}\right)$$

Από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών βρίσκουμε τα ν_1, ν_2 και n_j

$$\begin{array}{lll} \nu_1 = 30 & n_1 = 30 & n_5 = 152 \\ \nu_2 = 122 & n_2 = 60 & n_6 = 183 \\ & n_3 = 91 & n_7 = 213 \\ & n_4 = 122 & n_8 = 244 \end{array}$$

και έχουμε:

$$8.000 - \frac{3.000 \cdot 30 + 5.000 \cdot 122}{\Delta} = X\left(8 - \frac{1.371}{\Delta}\right) \Rightarrow$$

$$1.000\left(8 - \frac{90 + 610}{\Delta}\right) = X\left(8 - \frac{1.371}{\Delta}\right) \Rightarrow$$

$$1.000(8\Delta - 700) = X(8\Delta - 1.371) \Rightarrow$$

$$1.000 \cdot 23.300 = X \cdot 22.629 \Rightarrow X = 1.029,65$$

Παράδειγμα 21

Σήμερα, αποφασίζουμε την αντικατάσταση 3 γραμματίων με ονομαστικές αξίες €800, €600 και €1000 με αντίστοιχες λήξεις σε 40, 70 και 89 ημέρες αντίστοιχα με 2 νέα γραμμάτια συνολικής αξίας €2.420 από τα οποία το ένα λήγει σε 80 μέρες και το άλλο σε 110 μέρες αντίστοιχα. Ποια η ονομαστική αξία του καθενός αν έχουμε επιτόκιο 9% και εποχή ισοδυναμίας σε 80 μέρες από σήμερα;

Λύση

Τα γραμμάτια τα οποία θέλουμε να αντικαταστήσουμε είναι τα:

$$\begin{array}{lll} K_1 = 800 & \nu_1 = -40 & K_1\nu_1 = -32.000 \\ K_2 = 600 & \nu_2 = -10 & K_2\nu_2 - 6.000 \\ K_3 = 1.000 & \nu_3 = 9 & K_3\nu_3 = 9.000 \end{array}$$

και συνεπώς

$$K_1 + K_2 + K_3 = 2.400$$

$$K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3 = -29.000$$

Έστω ότι τα δύο νέα γραμμάτια έχουν ονομαστικές αξίες K_4, K_5 τότε $K_4 + K_5 = 2.420$ και έστω

$$\begin{array}{lll} K_4 = X & \nu_4 = 0 & K_4\nu_4 = 0 \\ K_5 = 2.420 - X & \nu_5 = 30 & K_5\nu_5 = 72.600 - 30X \end{array}$$

και συνεπώς

$$K_4 + K_5 = 2.420$$

$$K_4\nu_4 + K_5\nu_5 = 72.600 - 30X$$

γράφουμε την εξίσωση ισοδυναμίας

$$K_1 - \frac{K_1\nu_1 i}{360} + K_2 - \frac{K_2\nu_2 i}{360} + K_3 - \frac{K_3\nu_3 i}{360} = K_4 - \frac{K_4\nu_4 i}{360} + K_5 - \frac{K_5\nu_5 i}{360}$$

μετά από πράξεις

$$K_1 + K_2 + K_3 - \frac{K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3}{\Delta} = K_4 + K_5 - \frac{K_4\nu_4 + K_5\nu_5}{\Delta}$$

Έχουμε $\Delta = 360/0,09 = 4.000$, αντικαθιστούμε όλα τα δεδομένα

$$2400 - \frac{-29.000}{4.000} = 2.420 - \frac{72.600 - 30X}{4.000} \Rightarrow$$

$$\frac{29.000 + 72.600 - 30X}{4.000} = 2.420 - 2.400 \Rightarrow$$

$$101.600 - 30X = 80.000 \Rightarrow X = 720$$

Τώρα αντικαθιστούμε τις ποσότητες που υπολογίσαμε και έχουμε

$$-(72.600 - 30X)0,00025 = -20 + 29.000 \cdot 0,00025 \Rightarrow$$

$$30X = -80.000 + 101.600 \Rightarrow X = 720$$

Άρα οι ονομαστικές αξίες των δύο γραμματίων είναι:

$$K_4 = 720 \text{ και } K_5 = 1.700$$

Παράδειγμα 22

Γραμμάτια €3.000, €6.000 και €7.000 ευρώ που λήγουν μετά από 30, 50 και 60 ημέρες αντίστοιχα, αντικαταστάθηκαν με δύο γραμμάτια €10.000 και €6.100 που λήγουν μετά από 40 και 180 ημέρες αντίστοιχα. Με ποιο επιτόκιο έγινε η αντικατάσταση; Εποχή ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού.

Λύση

Τα τρία γραμμάτια

$K_1 = 3.000$	$\nu_1 = 30$	$K_1\nu_1 = 90.000$
$K_2 = 6.000$	$\nu_2 = 50$	$K_2\nu_2 = 300.000$
$K_3 = 7.000$	$\nu_3 = 60$	$K_3\nu_3 = 420.000$
$K_1 + K_2 + K_3 =$ 16.000	$K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3$ =	810.000

Αντικαθίστανται από τα δύο γραμμάτια

$K_4 = 10.000$	$\nu_4 = 40$	$K_4\nu_4 = 400.000$
$K_5 = 6.100$	$\nu_5 = 180$	$K_5\nu_5 = 1.098.000$
$K_4 + K_5 = 16.100$		$K_4\nu_4 + K_5\nu_5 = 1.498.000$

Από την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε για το επιτόκιο:

$$\left(K_1 + K_2 + K_3\right) - \left(K_4 + K_5\right) = \frac{\left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right) - \left(K_4\nu_4 + K_5\nu_5\right)}{\Delta} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(K_1 + K_2 + K_3\right) - \left(K_4 + K_5\right)}{\left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right) - \left(K_4\nu_4 + K_5\nu_5\right)} = \frac{1}{\Delta} = \frac{i}{360} \Rightarrow$$

$$i = \frac{\left(K_1 + K_2 + K_3\right) - \left(K_4 + K_5\right)}{\left(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3\right) - \left(K_4\nu_4 + K_5\nu_5\right)} \cdot 360$$

$$i = \frac{16.000 - 16.100}{810.000 - 1.498.000} \cdot 360 = \frac{-100}{-688.000} \cdot 360 = \frac{36}{688} = 0,05233$$

Δηλαδή το επιτόκιο είναι 5,2%.

Για μεγαλύτερη ποικιλία ασκήσεων δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

3.3. Ασκήσεις

3.3.1 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Αγοράζει κάποιος σήμερα (5 Ιουνίου) εμπορεύματα αξίας €3.000 και κανονίζει να τα πληρώσει σε 5 ισόποσες δόσεις που θα λήγουν στην πρώτη κάθε μήνα αρχίζοντας από τον Αύγουστο. Να βρεθεί το ποσό της δόσης. Έτος πολιτικό και επιτόκιο 10%.

Λύση

Θα πρέπει να υπολογίσουμε από τον πίνακα τοκοφόρων ημερών πόσες ημέρες είναι μεταξύ της σημερινής ημερομηνίας 5 Ιουνίου και των ημερομηνιών λήξης των γραμματίων:

5 Ιουνίου → 156,
1 Αυγούστου → 213,
1 Σεπτεμβρίου → 244,
1 Οκτωβρίου → 274,
1 Νοεμβρίου → 305,

1 Δεκεμβρίου → 335.

5 Ιουνίου – 1 Αυγούστου: ν1=213-156=57,
5 Ιουνίου – 1 Σεπτεμβρίου: ν2=244-156=88,
5 Ιουνίου – 1 Οκτωβρίου: ν3=274-156=118,
5 Ιουνίου – 1 Νοεμβρίου: ν4=305-156=149,
5 Ιουνίου – 1 Δεκεμβρίου: ν5=335-156=179.

οι δόσεις είναι ισόποσες

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = X$$

η εξίσωση ισοδυναμίας είναι:

$$K = X - \frac{X\nu_1 i}{365} + X - \frac{X\nu_2 i}{365} + X - \frac{X\nu_3 i}{365} + X - \frac{X\nu_4 i}{365} + X - \frac{X\nu_5 i}{365} =$$

$$= 5X - \left(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5\right)\frac{X\,0{,}1}{365} \Rightarrow$$

$$3.000 = 5X - 591\frac{X\,0.1}{365} \Rightarrow$$

$$3.000 = X\left(5 - 591\frac{0.1}{365}\right) \Rightarrow$$

$$X \approx 620$$

Άσκηση 2

Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας *K* πρέπει να πληρωθεί μετά από 60 ημέρες από σήμερα. Συμφωνείται να γίνουν τέσσερα (4) γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K/2,\ K/4,\ K/8,\ K/8$ τα οποία να λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων.

Λύση

$$K - \frac{K\nu i}{360} = \frac{K}{2} - \frac{K}{2}\frac{\nu i}{360} + \frac{K}{4} - \frac{K}{4}\frac{2\nu i}{360} + \frac{K}{8} - \frac{K}{8}\frac{3\nu i}{360} + \frac{K}{8} - \frac{K}{8}\frac{4\nu i}{360} \Rightarrow$$

$$60K = K\left(\frac{\nu}{2} + \frac{2\nu}{4} + \frac{3\nu}{8} + \frac{4\nu}{8}\right) \Rightarrow$$

$$60 = \frac{15\nu}{8} \Rightarrow \nu = 32$$

Το πρώτο γραμμάτιο θα λήγει σε 32 ημέρες από σήμερα και τα επόμενα σε 64, 96 και 128 ημέρες από σήμερα αντίστοιχα.

Άσκηση 3

Γραμμάτια ονομαστικής αξίας 800 και 900 ευρώ λήγουν μετά από 180 και 380 ημέρες αντίστοιχα. Πόσες μέρες πριν τη λήξη του πρώτου γραμματίου θα έχουν την ίδια παρούσα αξία; Ετήσιο επιτόκιο 18%.

Λύση

Έστω *ν* ημέρες πριν τη λήξη του πρώτου τότε η εποχή που τα δύο γραμμάτια είναι ισοδύναμα είναι 180-*ν* ημέρες από σήμερα.

Δηλαδή, το πρώτο γραμμάτιο λήγει $\nu_1 - \nu$ ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας,

ενώ το δεύτερο γραμμάτιο λήγει σε

$$\nu_2 = 380 - (180 - \nu) = 200 + \nu$$

ημέρες από την εποχή ισοδυναμίας.

Την ημέρα ισοδυναμίας ισχύει

$$K_1 - K_1\frac{\nu_1\ i}{360} = K_2 - K_2\frac{\nu_2\ i}{360} \Rightarrow$$

$$K_1 - K_2 = (K_1\nu - 200K_2 - K_2\nu)\frac{1}{2.000} \Rightarrow$$

$$-100=-100\nu\frac{1}{2.000}-90\Rightarrow$$
$$-10=-\frac{\nu}{20}\Rightarrow\nu=100$$
Τα δύο γραμμάτια έχουν την ίδια παρούσα αξία 100 ημέρες πριν τη λήξη του πρώτου γραμματίου.

Άσκηση 4

Έμπορος αγοράζει σήμερα από κάποιο προμηθευτή εμπορεύματα αξίας €2.000. Έχει υπογράψει με τον προμηθευτή συναλλαγματικές ονομαστικής αξίας €1.500 και €1.800 με λήξεις 40 και 80 μέρες από σήμερα αντίστοιχα. Συμφωνεί με τον προμηθευτή να εξοφλήσει όλο το χρέος του με τέσσερις συναλλαγματικές ίσης ονομαστικής αξίας οι οποίες θα λήγουν σε 60, 90, 110 και 140 μέρες από σήμερα. Αν έχουμε έτος μικτό επιτόκιο 8% και εποχή ισοδυναμίας τη μέρα υπολογισμού να βρεθούν οι αξίες των τεσσάρων συναλλαγματικών.

Λύση

Από τη μια πλευρά έχουμε τα μετρητά $K=2.000$ (μια οφειλή που δημιουργείται σήμερα) και τις δύο συναλλαγματικές $K_1=1.500$, $K_2=1.800$ οι οποίες λήγουν σε $\nu_1=40$, $\nu_2=80$ ημέρες από σήμερα.

Από την άλλη πλευρά έχουμε τις τέσσερις (4) συναλλαγματικές ίσης ονομαστικής αξίας X οι οποίες θα λήγουν σε $\nu_3=60,\ \nu_4=90,\ \nu_5=110,\ \nu_6=140$ από σήμερα.

Η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται:

$$K_1+K_2-K_2\nu_2\frac{i}{360}+K_3-K_3\nu_3\frac{i}{360}=$$
$$X-X\nu_4\frac{i}{360}+X-X\nu_5\frac{i}{360}+X-X\nu_6\frac{i}{360}+X-X\nu_7\frac{i}{360}\Rightarrow$$

κάνοντας πράξεις και αντικαθιστώντας έχουμε

$$K_1+K_2+K_3-\frac{(K_2\nu_2+K_3\nu_3)}{4.000}=4X-X\frac{(\nu_4+\nu_5+\nu_6+\nu_7)}{4.000}\Rightarrow$$
$$5.300-51=4X-0{,}1X\Rightarrow$$
$$5.249=3{,}9X\Rightarrow X=1.345{,}89$$

Άσκηση 5

Γραμμάτιο €6.000 πρέπει να πληρωθεί μετά από 80 ημέρες από σήμερα. Συμφωνείται να γίνουν 4 ίσα γραμμάτια από €1.500 το καθένα, τα οποία να λήγουν ανά ίσα χρονικά διαστήματα από σήμερα. Να βρεθούν οι λήξεις των τεσσάρων γραμματίων.

Επιτόκιο 12% και έτος μικτό.

Λύση

$$K\nu\frac{i}{360}=X(\nu+2\nu+3\nu+4\nu)\frac{i}{360}\Rightarrow$$
$$480.000=15.000\ \nu\Rightarrow\nu=32$$

Άσκηση 6

Σήμερα, αποφασίζουμε την αντικατάσταση 3 γραμματίων με ονομαστικές αξίες €800, €600 και €1.000 και με αντίστοιχες λήξεις σε 40, 70 και 89 ημέρες αντίστοιχα με 2 νέα γραμμάτια συνολικής αξίας €2.420 ευρώ από τα οποία το ένα λήγει σε 80 μέρες και το άλλο σε 110 μέρες αντίστοιχα. Ποια η ονομαστική αξία του καθενός αν έχουμε επιτόκιο 9% και εποχή ισοδυναμίας σε 80 μέρες από σήμερα;

Λύση

Τα γραμμάτια τα οποία θέλουμε να αντικαταστήσουμε είναι τα:

$$K_1=800\ \ \nu_1=-40\ \ K_1\cdot\nu_1=-32.000$$
$$K_2=600,\ \nu_2=-10,\ K_2\cdot\nu_2=-6.000$$
$$K_3=1.000,\ \nu_3=9,\ K_3\cdot\nu_3=9.000$$

και συνεπώς

$$K_1+K_2+K_3=2.400$$

$$K_1\nu_1+K_2\nu_2+K_3\nu_3=-29.000$$

Έστω ότι τα δύο νέα γραμμάτια έχουν ονομαστικές αξίες K_4, K_5 τότε $K_4+K_5=2.420$ και έστω

$$K_4=X\ ,\ \nu_4=0\ ,\ K_4\cdot\nu_4=0$$

$$K_5=2.420-X\ ,\ \nu_5=30\ ,\ K_5\cdot\nu_5=72.600-30X$$

και συνεπώς

$$K_4+K_5=2.420$$

$$K_4\cdot\nu_4+K_5\cdot\nu_5=72.600-30X$$

γράφουμε την εξίσωση ισοδυναμίας

$$K_1-\frac{K_1\nu_1 i}{360}+K_2-\frac{K_2\nu_2 i}{360}+K_3-\frac{K_3\nu_3 i}{360}=K_4-\frac{K_4\nu_4 i}{360}+K_5-\frac{K_5\nu_5 i}{360}$$

μετά από πράξεις

$$-\left(K_4\nu_4+K_5\nu_5\right)\frac{0,09}{360}=\left(K_1+K_2+K_3\right)-\left(K_4+K_5\right)-\left(K_1\nu_1+K_2\nu_2+K_3\nu_3\right)\frac{0,09}{360}$$

τώρα αντικαθιστούμε τις ποσότητες που υπολογίσαμε και έχουμε

$$-(72.600-30X)\cdot 0,00025=-20+29.000\cdot 0,00025\Rightarrow$$

$$30X=-80.000+101.600\Rightarrow X=720$$

Άρα οι ονομαστικές αξίες των δύο γραμματίων είναι:

$$K_4=720,\ \ K_5=1.700$$

Άσκηση 7

Δύο γραμμάτια λήγουν μετά 60 και 180 ημέρες αντιστοίχως, έχουν μέση λήξη μετά 80 ημέρες, άθροισμα ονομαστικών αξιών ισοδύναμο με γραμμάτιο €20.000, το οποίο λήγει μετά 120 ημέρες από σήμερα. Να βρεθούν οι ονομαστικές αξίες των γραμματίων. Το έτος είναι μικτό και το επιτόκιο 12%.

Λύση

Έστω K_1, K_2 οι ονομαστικές αξίες των δύο γραμματίων.

Τα δυο γραμμάτια λήγουν μετά από 60 και 180 ημέρες και έχουν μέση λήξη μετά από 80 ημέρες, συνεπώς

$$\left(K_1+K_2\right)-\left(K_1+K_2\right)\frac{\nu i}{360}=K_1-K_1\frac{\nu_1 i}{360}+K_2-K_2\frac{\nu_2 i}{360}$$

με

$$\nu_1=60,\ \ \nu_2=180,\ \ \nu=80$$

μετά από πράξεις καταλήγουμε στην εξής σχέση μεταξύ των δύο ονομαστικών αξιών:

$$K_1=5K_2$$

Επίσης έχουμε ότι το άθροισμα των ονομαστικών αξιών των δύο γραμματίων είναι ισοδύναμο με γραμμάτιο 20,000 €, το οποίο λήγει μετά 120 ημέρες από σήμερα, τότε

$$K_1+K_2=2.000\left(1-\frac{120\cdot 0,12}{360}\right)\Rightarrow$$

$$6K_2=2.000\cdot 0,96\Rightarrow K_2=320$$

Άρα οι ονομαστικές αξίες των δύο γραμματίων είναι:

$$K_1=1.600,\ K_2=320$$

Άσκηση 8

Γραμμάτια €3.000, €6.000 και €7.000 ευρώ που λήγουν μετά από 30, 50 και 60 ημέρες αντίστοιχα, αντικαταστάθηκαν με δύο γραμμάτια €10.000 και €6.100 που λήγουν μετά από 40 και 180 ημέρες αντίστοιχα. Με ποιο επιτόκιο έγινε η αντικατάσταση; Εποχή ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού.

Λύση

Τα τρία γραμμάτια

$$K_1 = 3.000 \quad \nu_1 = 30 \quad K_1 \cdot \nu_1 = 90.000$$
$$K_2 = 6.000 \quad \nu_2 = 50 \quad K_2 \cdot \nu_2 = 300.000$$
$$K_3 = 7.000 \quad \nu_3 = 60 \quad K_3 \cdot \nu_3 = 420.000$$

αντικαθίστανται από τα δύο γραμμάτια

$$K_4 = 10.000,\ \nu_4 = 40,\ K_4\nu_4 = 400.000$$
$$K_5 = 6.100,\ \nu_5 = 180,\ K_5\nu_5 = 1.098.000$$

Από την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε για το επιτόκιο:

$$i = \frac{(K_1 + K_2 + K_3) - (K_4 + K_5)}{(K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3) - (K_4\nu_4 + K_5\nu_5)} \cdot 360 =$$
$$= \frac{36.000}{688.000} = 0,052 \text{, δηλαδή } 5.2\%$$

3.3.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Γραμμάτιο λήξης στις 20 Αυγούστου, αντικαθιστά την 10η Ιουλίου τα εξής τρία γραμμάτια: €5.000 λήξης στις 30 Ιουλίου, €6.000 λήξης στις 9 Αυγούστου και €8.000 λήξης στις 18 Σεπτεμβρίου. Να βρεθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 0,10 εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, έτος πολιτικό. (€18.978)
2. Οφείλουμε γραμμάτια €2.500, €3.000 και €4.000, που λήγουν αντίστοιχα μετά από 14, 30 και 40 ημέρες. Τα γραμμάτια αυτά τα αντικαθιστούμε σήμερα με ένα γραμμάτιο €9.500. Να βρεθεί η λήξη του γραμματίου αυτού. (30 ημέρες)
3. Πότε πρέπει να λήγει γραμμάτιο €6.000, το οποίο την 1η Σεπτεμβρίου το αντικαθιστούν δύο γραμμάτια: α) €3.500 λήξεως στις 20 Νοεμβρίου και β) €2.500 λήξεως στις 11 Οκτωβρίου. Εποχή ισοδυναμίας: α) ημέρα υπολογισμού και β) η κοινή λήξη. Επιτόκιο 9%. Έτος πολιτικό.
4. Να βρεθεί η μέση λήξη τριών γραμματίων ονομαστικής αξίας €1000, €1200 και €2000 ευρώ τα οποία λήγουν σε 40, 80 και 142 ημέρες από σήμερα αντίστοιχα. (ν=100 ημέρες).
5. Να βρεθεί η μέση λήξη τεσσάρων γραμματίων που λήγουν σε 33, 66, 88 και 110 μέρες αντίστοιχα, αν οι ονομαστικές τους αξίες είναι αντίστοιχα ανάλογες με τους αριθμούς 8, 6, 5 και 3 και το έτος μικτό. (65 ημέρες).
6. Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €25.000, λήξης στις 20 Μαρτίου, αντικαθιστά τα εξής γραμμάτια: α) €10.000 λήξης στις 20 Απριλίου, β) €12.000 λήξης στις 20 Μαΐου και γ) ένα άλλο ακόμη, λήξης στις 20 Ιουλίου. Ζητείται η ονομαστική αξία του τελευταίου γραμματίου, αν έχουμε επιτόκιο 10%, έτος πολιτικό και εποχή ισοδυναμίας την 20η Μαΐου του ιδίου έτους.
7. Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας €5.000 που λήγει στις 24 Απριλίου, αντικαθίσταται την 10η Μαρτίου από δύο γραμμάτια. Το πρώτο ονομαστικής αξίας € 1.200 και λήξης στις 9 Απριλίου και το δεύτερο ονομαστικής αξίας €3.750. Ποια θα είναι η λήξη του δεύτερου γραμματίου, αν το επιτόκιο είναι 0,04, εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού και έτος μικτό.
8. Γραμμάτιο €12.000 έπρεπε να πληρωθεί την 30η Μαΐου. Για την εξόφληση του έγιναν τρία γραμμάτια: α) €4.500 λήξης στις 15 Απριλίου, β) €4.500 λήξης στις 10 Μαΐου και γ) €3.000. Να βρεθεί η λήξη του τρίτου γραμματίου.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 4

4. Ανατοκισμός

4.1 Εισαγωγή

Στη διαδικασία με την οποία ένα κεφάλαιο κατατίθεται στον απλό τόκο, στο τέλος κάθε περιόδου παίρνουμε τον τόκο και αφήνουμε το αρχικό κεφάλαιο να τοκιστεί. Έτσι το κεφάλαιο το οποίο κάθε φορά τοκίζεται παραμένει σταθερό. Σταθερός είναι βέβαια και ο τόκος τον οποίο παίρνουμε στο τέλος κάθε περιόδου.

Το κεφάλαιο του ανατοκισμού είναι ίσως το σημαντικότερο κομμάτι των οικονομικών μαθηματικών και πολλοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη του, για παράδειγμα οι: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

Στον σύνθετο τόκο (ή ανατοκισμό), στο τέλος κάθε περιόδου, ο τόκος και το κεφάλαιο αθροίζονται και το άθροισμα αυτό τοκίζεται σαν νέο αρχικό κεφάλαιο. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε περίοδο, αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης, όπως αντίστοιχα αυξάνεται και ο τόκος τον οποίο παίρνουμε. Η χρονική περίοδος του ανατοκισμού μπορεί να είναι ετήσια, εξαμηνιαία, τριμηνιαία ή μηνιαία. Σήμερα οι περισσότερες τράπεζες χρησιμοποιούν εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Δηλαδή στο τέλος κάθε εξαμήνου, οι τόκοι, που έχουν παραχθεί κατά τη διάρκεια του, προστίθενται στο κεφάλαιο και το σύνολο τοκίζεται για το επόμενο εξάμηνο. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να αποσύρουμε την κατάθεση μας.

Τα κεφάλαια που προκύπτουν κατά τη διαδικασία του ανατοκισμού στο τέλος κάθε περιόδου, αποτελούν γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης και λόγο τον όρο $1+i$.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ανατοκισμός συναντάμε τέσσερα ποσά:

Το **αρχικό κεφάλαιο** (ή αρχική αξία), που καταθέτουμε αρχικά, το οποίο συμβολίζουμε με K_0,

Το **τελικό κεφάλαιο** (ή τελική αξία) που είναι το ποσό που αποσύρουμε στο τέλος του ανατοκισμού και το οποίο συμβολίζεται με K_n

Το **επιτόκιο** με το οποίο γίνεται ο ανατοκισμός και συμβολίζεται με i και

Ο **χρόνος του τοκισμού** ο οποίος συμβολίζεται με n, αν είναι ακέραιες περίοδοι ανατοκισμού, ή μ/n αν είναι κλάσμα της περιόδου.

Σημειώνεται ότι η περίοδος του ανατοκισμού πρέπει να συμπίπτει με το επιτόκιο. Δηλαδή αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο πρέπει και το επιτόκιο να είναι εξαμηνιαίο. Τότε το n θα μετριέται σε εξάμηνα. Στην περίπτωση που τα δύο παραπάνω μεγέθη δεν συμπίπτουν, τότε θα πρέπει να μετατρέψουμε το επιτόκιο στην αντίστοιχη περίοδο του ανατοκισμού. Έτσι για παράδειγμα αν έχουμε τριμηνιαίο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο θα πρέπει να μετατρέψουμε το επιτόκιο σε τριμηνιαίο, μιας και η περίοδος του ανατοκισμού δεν μπορεί να αλλάξει . Παρακάτω θα δούμε τη διαδικασία με την οποία γίνεται αυτή η αλλαγή.

4.2. Εύρεση της τελικής αξίας K_n, όταν ο χρόνος αντιστοιχεί σε ακέραιες περιόδους

Το κεφάλαιο που καταθέτουμε αρχικά στην τράπεζα το συμβολίζουμε με K_0 μιας και αντιστοιχεί στην περίοδο μηδέν, είναι δηλαδή το αρχικό κεφάλαιο. Όμοια έχουμε τα κεφάλαια $K_1, K_2, K_3, \ldots$ που αντιστοιχούν στην πρώτη, τη δεύτερη, την τρίτη κ.λ.π. περίοδο. Για καθένα από αυτά, με επιτόκιο ανατοκισμού i, έχουμε:

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i \Rightarrow K_1 = K_0 \cdot (1 + 1 \cdot i) \Rightarrow K_1 = K_0 \cdot (1+i)$$

$$K_2 = K_1 \cdot (1+i) \Rightarrow K_2 = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) \Rightarrow K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2$$

$$K_3 = K_2 \cdot (1+i) \Rightarrow K_3 = K_0 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) \Rightarrow K_3 = K_0 \cdot (1+i)^3$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$K_n = K_{n-1} \cdot (1+i) \Rightarrow K_n = K_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) \Rightarrow K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

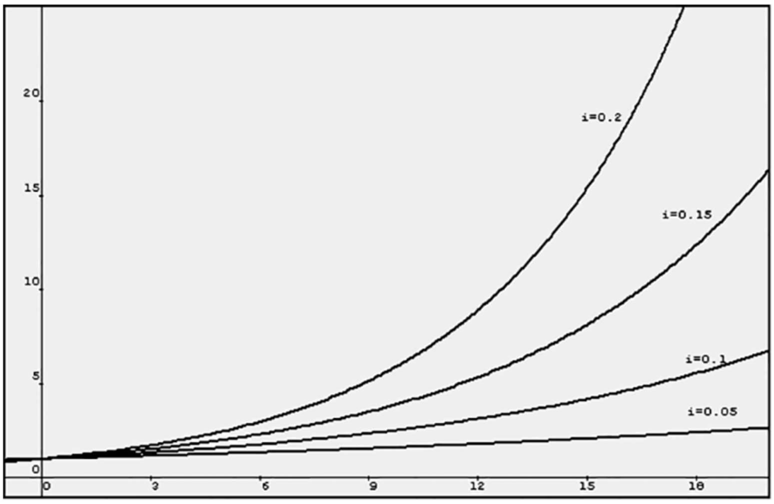
Και τελικά βρίσκουμε τον γενικό τύπο του ανατοκισμού:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

(1)

Για να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο θα πρέπει βέβαια το επιτόκιο να είναι σταθερό για όλη τη διάρκεια του ανατοκισμού.

Η παράσταση $(1+i)^n$ ονομάζεται συντελεστής κεφαλαιοποίησης και η τιμή της βρίσκεται από πίνακες για διάφορα επιτόκια και περιόδους. Στο σχήμα 4.1 φαίνεται η γραφική παράσταση του συντελεστή κεφαλαιοποίησης για διάφορα επιτόκια. Οι πίνακες αυτοί, λέγονται οικονομικοί και παρατίθενται στο τέλος του βιβλίου.



Σχήμα 4.1 *Γραφική παράσταση συντελεστών κεφαλαιοποίησης για διάφορα επιτόκια.*

Έτσι λοιπόν στον ανατοκισμό τα χρήματα που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης θα είναι $K_0 \cdot (1+i)^n$, ενώ στον απλό τόκο $K_0 + I = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot (1+n \cdot i)$.

Επειδή:

$$(1+i)^n > 1+n \cdot i \text{ Ανισότητα Bernoulli για } n>1$$

και

$$K_0 \cdot (1+i)^n > K_0 \cdot (1+n \cdot i) \text{ Πολλαπλασιάζω με } K_0 > 0$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε ότι αν το *n>1*, η τελική αξία του ανατοκισμού είναι μεγαλύτερη από αυτήν του απλού τόκου.

Για *n=1* προφανώς, όπως φαίνεται παραπάνω, οι τελικές αξίες είναι ίσες.

Ενώ για *n<1* η τελική αξία στον απλό τόκο είναι μεγαλύτερη από αυτήν του ανατοκισμού. Έτσι συνήθως ανατοκισμό χρησιμοποιούμε, αν η περίοδος τοκισμού είναι μεγαλύτερη του ενός έτους.

Για να δούμε τη διαφορά στην τελική αξία μεταξύ των δυο ειδών τοκισμού ας δούμε το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1

Κεφάλαιο €3.000 τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12% για 35 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος της κατάθεσης αν ο τοκισμός έγινε (α) Με απλό τόκο (β) Με ετήσιο ανατοκισμό.

Λύση

(α) Έχουμε: $K = 3.000$, $i = 0{,}12$ και $n = 35$. Άρα:

$$K + I = K + K \cdot n \cdot i = 3000 + 3000 \cdot 35 \cdot 0{,}12 = 15.600$$

(β) $K_0 = 3.000$

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow K_n = 3.000 \cdot (1+0{,}12)^{35} \Rightarrow K_n = 3.000 \cdot 52{,}7996$$

Το αποτέλεσμα της δύναμης: $1{,}12^{35}$ βρίσκεται από τους οικονομικούς πίνακες στο τέλος του βιβλίου.

Άρα: $K_n = 158.398{,}8$

Η αύξηση του κεφαλαίου στον απλό τόκο γίνεται γραμμικά, ενώ στον ανατοκισμό εκθετικά. Για τον λόγο αυτό δικαιολογείται και η πολύ μεγάλη διαφορά στις τελικές αξίες των δύο περιπτώσεων.

4.2.1. Γενίκευση του τύπου του ανατοκισμού για κλασματικό αριθμό περιόδων

Αν ο αριθμός των περιόδων του ανατοκισμού ενός κεφαλαίου είναι ακέραιος τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο (1). Στην πράξη όμως πολλές φορές ο χρόνος κατάθεσης δεν είναι σε ακέραιο αριθμό περιόδων αλλά σε κλασματικό. Έτσι για παράδειγμα αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 10% και το κεφάλαιο τοκίζεται για 2 χρόνια και 4 μήνες ο αριθμός των περιόδων δεν είναι ακέραιος. Για τις περιπτώσεις αυτές υπάρχουν δύο τρόποι υπολογισμού της τελικής αξίας.

(α) Γραμμική μέθοδος

Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε ανατοκισμό για τον ακέραιο αριθμό περιόδων και για το υπόλοιπο κλασματικό μέρος εφαρμόζεται ο απλός τόκος.

Από τον τύπο (1) βρίσκουμε την τελική αξία για τον ακέραιο αριθμό περιόδων

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Και για το κλασματικό μέρος έχουμε:

$$K_{\frac{\mu}{n}} = \frac{K_n \cdot \mu \cdot i}{12} \Rightarrow K_{\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0 \cdot (1+i)^n \cdot \mu \cdot i}{12}$$

Άρα το τελικό ποσό που θα σχηματισθεί είναι:

$$K_n + K_{\frac{\mu}{n}} = K_0 \cdot (1+i)^n + \frac{K_0 \cdot (1+i)^n \cdot \mu \cdot i}{12} \Rightarrow$$

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot \left[1 + \frac{\mu \cdot i}{12}\right] \Rightarrow$$

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (12 + \mu \cdot i)}{12} \tag{2}$$

(β) Εκθετική μέθοδος

Στη μέθοδο αυτή θεωρούμε ότι ο ανατοκισμός συνεχίζεται εκτός από τον ακέραιο αριθμό περιόδων και για κλάσμα της περιόδου.

Οπότε έχουμε $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ για τις ακέραιες περιόδους και $(1+i)^{\frac{\mu}{n}}$ για το κλάσμα άρα τελικά:

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{n}} \Rightarrow$$

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0 \cdot (1+i)^{n+\frac{\mu}{n}} \tag{3}$$

Η τιμή της παράστασης $(1+i)^{\frac{\mu}{n}}$ για τα συνήθη επιτόκια βρίσκεται από τους οικονομικούς πίνακες μόνο αν το κλάσμα $\frac{\mu}{n}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{k}{12}$ όπου $k \in \mathbb{R}^*$ και $k \leq 12$. Αν το k δεν είναι φυσικός αριθμός τότε η τιμή της παράστασης $(1+i)^{\frac{\mu}{n}}$ βρίσκεται προσεγγιστικά με μια μέθοδο που θα δούμε παρακάτω και λέγεται μέθοδος της παρεμβολής.

Παράδειγμα 2

Κεφάλαιο €10.000 τοποθετείται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 10% για 8 χρόνια και 6 μήνες. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρουμε μετά το τέλος της κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε $K_0 = 10.000$, $i = 0,1$, $n = 8$ και $\mu = 6$

(α) Γραμμική μέθοδος

Με την βοήθεια του τύπου (2) και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (12+\mu \cdot i)}{12} = \frac{10.000 \cdot (1+0,1)^8 \cdot (12+6 \cdot 0,1)}{12}$$

$$K_{8+\frac{6}{12}} = \frac{10.000 \cdot 2,1436 \cdot 12,6}{12} = \frac{270.093,6}{12} = 22.507,8$$

(β) Εκθετική μέθοδος

Με τη βοήθεια του τύπου (3) και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = K_0 \cdot (1+i)^{n+\frac{\mu}{n}} \Rightarrow K_{8+\frac{6}{12}} = 10.000 \cdot (1+0,1)^8 \cdot (1+0,1)^{\frac{6}{12}} \Rightarrow$$

$$K_{8+\frac{6}{12}} = 10.000 \cdot 2,1436 \cdot 1,0488 \approx 22.482,08$$

Τις δυνάμεις $1,1^8$ και $1,1^{\frac{6}{12}}$ τις βρήκαμε από τους οικονομικούς πίνακες όπως θα βρίσκουμε και όλες τις αντίστοιχες δυνάμεις από δω και πέρα.

Παράδειγμα 3

Κεφάλαιο €20.000 τοποθετείται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια και 9 μήνες. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί στο τέλος της κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 20.000$, $i = 0,05$,

6 χρόνια x 2 = 12 εξάμηνα

9 μήνες = 1 εξάμηνο + 3 μήνες.

Άρα συνολικά 13 εξάμηνα + 3 μήνες. $n = 13$, $\mu = 3$

(α) Γραμμική μέθοδος

$$K_{n+\frac{\mu}{n}} = \frac{K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (12+\mu \cdot i)}{12} \Rightarrow K_{13+\frac{2}{6}} = \frac{20000 \cdot (1+0,05)^{13} \cdot (12+3 \cdot 0,05)}{12} \Rightarrow$$

$$K_{13+\frac{2}{6}} = \frac{20.000 \cdot 1,8856 \cdot 12,15}{12} = \frac{458.200,8}{12} = 38.183,4$$

(β) Εκθετική μέθοδος

Το κλάσμα 3/6 το μετατρέπουμε στο ισοδύναμο 6/12 γιατί στους οικονομικούς πίνακες υπάρχουν στον εκθέτη μόνο κλάσματα με παρανομαστή 12.

Με αντικατάσταση στον τύπο (3) έχουμε:

$$K_{13+\frac{6}{12}} = 20000 \cdot (1+0,05)^{13} \cdot (1+0,05)^{\frac{6}{12}}$$ οπότε τελικά έχουμε:

$$K_{8+\frac{6}{12}} = 20.000 \cdot 1,8856 \cdot 1,0247 = 38.643,4864$$

4.2.2. Μέθοδος της παρεμβολής

Σε περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε την εκθετική μέθοδο και είτε ο χρόνος, είτε το επιτόκιο δεν είναι ακέραιος αριθμός οπότε δεν υπάρχει στους οικονομικούς πίνακες, τότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στις δύο πλησιέστερες στη ζητούμενη τιμή και με βάση αυτές γίνεται μια εκτίμησή της. Παίρνουμε τις τιμές εκατέρωθεν της ζητούμενης και με βάση αυτές την προσεγγίζουμε. Στη συνέχεια θα δώσουμε παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου.

Παράδειγμα 4

Καταθέτουμε €1.000 για 3 χρόνια, 4 μήνες και 12 μέρες με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.

Λύση

Έχουμε $K_0 = 1.000$ και $i = 0,06$.

Προφανώς στους οικονομικούς πίνακες μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή κεφαλαιοποίησης για τα χρόνια και τους μήνες αλλά όχι για τις μέρες. Αρχικά μετατρέπουμε τις μέρες σε μήνες.

1 μήνας	30 μέρες
Χ; μήνες	12 μέρες

$X = \frac{12}{30} = 0,4$ μήνες. Έτσι συνολικά θα έχουμε 3 χρόνια και 4,4 μήνες. Οπότε για να βρούμε την τελική αξία του κεφαλαίου από τον τύπο (3) με αντικατάσταση θα έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \Rightarrow K_{n+\frac{\mu}{12}} = 1.000 \cdot 1,06^3 \cdot 1,06^{\frac{4,4}{12}}$$

$$\text{ή } K_{n+\frac{\mu}{12}} = 1.000 \cdot 1,191 \cdot 1,06^{\frac{4,4}{12}} = 1.191 \cdot 1,06^{\frac{4,4}{12}}.$$

Η δύναμη $1,06^{\frac{4,4}{12}}$ δεν υπάρχει στους πίνακες οπότε για την εύρεση της θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής. Βρίσκουμε από τον πίνακα τις δύο κοντινότερες τιμές εκατέρωθεν της ζητούμενης, δηλαδή βρίσκουμε τη δύναμη για 4 και για 5 μήνες. Προφανώς η τιμή 4,4 βρίσκεται ενδιάμεσα από το 4 και από το 5.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{|l} 1,06^{\frac{4}{12}} = 1,0196 \\ 1,06^{\frac{5}{12}} = 1,0246 \\ \hline \end{array}$$

Άρα για διαφορά ενός μήνα (5-4) η διαφορά στην τιμή είναι 0,005 (1,0246 -1,0196).

Για διαφορά στους μήνες 0,4 (4,4 -4) ποια θα είναι η διαφορά στην τιμή; Με απλή μέθοδο των τριών έχουμε:

$$\begin{array}{|ll} 1 & 0,005 \\ 0,4 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow X = 0,005 \cdot 0,4 \Rightarrow X = 0,002.$$

Επομένως η αύξηση της τιμής για το 0,4 του μήνα είναι 0,002. Έτσι τελικά:

$$1,06^{\frac{4,4}{12}} = 1,0196 + 0,002 = 1,0216$$

Άρα

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = 1.191 \cdot 1,0216 = 1.216,73.$$

Παράδειγμα 5

Καταθέτουμε κεφάλαιο €3.500 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5,6% για 3 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρουμε μετά το τέλος της κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 3.500$, $n = 3$ και $i = 0,056$

Κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (1) θα πάρουμε

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow K_3 = 3500 \cdot 1,056^3$$

Η τιμή της παράστασης $1,056^3$ δεν υπάρχει στους οικονομικούς πίνακες, οπότε θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Βρίσκουμε τις δύο τιμές που υπάρχουν στους πίνακες και είναι οι κοντινότερες στις ζητούμενες.

$$\begin{array}{|l} 1,05^3 = 1,1576 \\ 1,06^3 = 1,1910 \\ \hline \end{array}$$

έτσι για διαφορά στο επιτόκιο 0,01 (6%-5%) έχουμε διαφορά στην τιμή 0,0334 (1,191-1,1576). Αν τώρα έχουμε διαφορά στο επιτόκιο 0,006 (5,6% - 5%) ποια θα είναι η διαφορά στην τιμή; Με απλή μέθοδο των τριών βρίσκουμε:

$$\begin{array}{|ll} 0,01 & 0,0334 \\ 0,006 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,0334 \cdot \frac{0,006}{0,01} \Rightarrow X = 0,0334 \cdot 0,6 \Rightarrow X = 0,02004$$

επομένως η αύξηση στην τιμή είναι 0,02004 άρα τελικά έχουμε:

$$1,056^3 = 1,1576 + 0,02004 = 1,17764$$

άρα $K_3 = 3.500 \cdot 1,17764 = 4.121,74$

Παράδειγμα 6

Τοποθετούμε κεφάλαιο €10.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8,3% για 5 χρόνια 4 μήνες και 18 μέρες. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρουμε μετά το τέλος του ανατοκισμού.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 10.000$, $i = 0,083$, $n = 5$ και $\mu = 4$. Αρχικά μετατρέπουμε τις μέρες σε μήνες. Έτσι έχουμε:

30 μέρες → 1 μήνας
18 μέρες → X;

$$X = 1 \cdot \frac{18}{30} \Rightarrow X = 0,6$$

Άρα συνολικά οι μήνες είναι 4,6.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3) βρίσκουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} = 10.000 \cdot 1,083^5 \cdot 1,083^{\frac{4,6}{12}}$$

Όμως στους πίνακες δεν υπάρχουν οι όροι $1,083^5$, $1,083^{\frac{4,6}{12}}$. Ειδικά ο δεύτερος όρος χρειάζεται παρεμβολή και για το επιτόκιο αλλά και για τον χρόνο.

Ας ξεκινήσουμε από τον πρώτο όρο του οποίου η προσέγγιση είναι ίδια με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος. Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{|l} 1,08^5 = 1,4693 \\ 1,09^5 = 1,5386 \\ \hline \end{array}$$

Δηλαδή για διαφορά στο επιτόκιο 0,01 (9% -8%) έχουμε διαφορά στην τιμή 0,0693 (1,5386-1,4693). Για διαφορά στο επιτόκιο 0,003 (0,083-0,08) ποια θα είναι διαφορά στην τιμή;

$$\begin{array}{|ll} 0,01 & 0,0693 \\ 0,003 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,0693 \cdot \frac{0,003}{0,01} = 0,02079$$

Άρα η αύξηση στην τιμή είναι 0,02079 οπότε:

$$1,083^5 = 1,4693 + 0,02079 \simeq 1,49$$

Για τον όρο $1,083^{\frac{4,6}{12}}$ θα βρούμε πρώτα τις τιμές των $1,083^{\frac{4}{12}}$ και $1,083^{\frac{5}{12}}$. Δουλεύοντας όπως προηγουμένως έχουμε:

$$\begin{array}{|l} 1,08^{\frac{4}{12}} = 1,0260 \\ 1,09^{\frac{4}{12}} = 1,0291 \\ \hline \end{array}$$

και βρίσκοντας τις διαφορές θα έχουμε:

$$\begin{array}{|ll} 0,01 & 0,0031 \\ 0,003 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,0031 \cdot \frac{0,003}{0,01} = 0,00093\,,$$

συνεπώς

$$1,083^{\frac{4}{12}} = 1,0260 + 0,00093 = 1,02693 \simeq 1,027 \tag{4}$$

Αντίστοιχα

$$\begin{array}{|l} 1,08^{\frac{5}{12}} = 1,0325 \\ 1,09^{\frac{5}{12}} = 1,0366 \\ \hline \end{array}$$

και με τις διαφορές

$$\begin{array}{|ll} 0,01 & 0,0041 \\ 0,003 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,0041 \cdot \frac{0,003}{0,01} = 0,00123$$

συνεπώς

$$1,083^{\frac{5}{12}} = 1,0325 + 0,00123 = 1,03373 \approx 1,034 \tag{5}$$

Από (4) και (5) έχουμε: $1,083^{\frac{4}{12}} = 1,027$ και $1,083^{\frac{5}{12}} = 1,034$ ενώ εμείς θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης $1,083^{\frac{4,6}{12}}$. Άρα για διαφορά 1 μήνα (5-4) έχουμε διαφορά στην τιμή 0,007 (1,034-1,027), για διαφορά στους μήνες 0,6 (4,6-4) ποια θα είναι η διαφορά στην τιμή;

$$\begin{array}{|ll} 1 & 0,007 \\ 0,6 & X; \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,007 \cdot 0,6 \Rightarrow X = 0,0042\,.$$

Άρα

$$1,083^{\frac{4,6}{12}} = 1,027 + 0,0042 = 1,0312$$

Οπότε τελικά θα έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}} = 10.000 \cdot 1,083^5 \cdot 1,083^{\frac{4,6}{12}} = 10.000 \cdot 1,49 \cdot 1,0312$$

ή

$$K_{5+\frac{4,6}{12}} = 15.364,88$$

4.3. Εύρεση του τόκου της ν- περιόδου

Για να βρούμε τον τόκο που πήραμε κατά τη διάρκεια της ν–περιόδου, αρκεί να βρούμε τα χρήματα που συσσωρεύτηκαν μέχρι και τη νιοστή περίοδο (K_n) και να αφαιρέσουμε τα χρήματα που μαζεύτηκαν μέχρι και την προηγούμενη (ν-1) περίοδο (K_{n-1}). Έτσι θα έχουμε: Έστω ότι καταθέτουμε αρχικό κεφάλαιο K_0 με επιτόκιο i . Για να βρούμε τους τόκους που θα πάρουμε κατά τη διάρκεια της ν– περιόδου θα πάρουμε:

$$E_n = K_n - K_{n-1} = K_0 \cdot (1+i)^n - K_0 \cdot (1+i)^{n-1}$$

ή

$$E_n = K_0 \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i-1)$$

και τελικά:

$$E_n = K_0 \cdot i \cdot (1+i)^{n-1} \qquad (6)$$

Παράδειγμα 7

Κεφάλαιο €5.000 κατατίθεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθούν οι τόκοι θα πάρουμε κατά τη διάρκεια του 8ου έτους.

Λύση

Έχουμε $K_0 = 5.000$, $i = 0,08$ και κάνοντας αντικατάσταση στη σχέση (6) βρίσκουμε:

$$E_n = K_0 \cdot i \cdot (1+i)^{n-1} \Rightarrow E_8 = 5.000 \cdot 0,08 \cdot 1,08^{8-1}$$

οπότε:

$$E_8 = 5.000 \cdot 0,08 \cdot 1,7138 \Rightarrow E_8 = 685,52.$$

Παράδειγμα 8

Κεφάλαιο τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και δίνει τόκους κατά τη διάρκεια του 5^{ου} έτους όσους και κατά τη διάρκεια του 3^{ου} και του 4^{ου} έτους μαζί. Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο έγινε η κατάθεση.

Λύση

Αν συμβολίσουμε με $I_3,\ I_4,\ I_5$ τους τόκους κατά τη διάρκεια του 3^{ου}, 4^{ου}, 5^{ου} έτους αντίστοιχα τότε θα έχουμε ότι:

$$I_5 = I_3 + I_4 \Rightarrow K_5 - K_4 = K_3 - K_2 + K_4 - K_3$$

ή κάνοντας πράξεις βρίσκουμε:

$$K_5 - 2 \cdot K_4 + K_2 = 0$$

ή

$$K_0 \cdot (1+i)^5 - 2 \cdot K_0 \cdot (1+i)^4 + K_0 \cdot (1+i)^2 = 0$$

διαιρούμε όλη την παράσταση με $K_0 \neq 0$

$$(1+i)^5 - 2 \cdot (1+i)^4 + (1+i)^2 = 0$$

βγάζουμε κοινό παράγοντα το $(1+i)^2$ και έχουμε:

$$(1+i)^2 \cdot \left[(1+i)^3 - 2 \cdot (1+i)^2 + 1\right] = 0$$

ή αν θέσουμε όπου $X = 1 + i$ θα πάρουμε τη μορφή:

$$X^2 \cdot (X^3 - 2 \cdot X^2 + 1) = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & -1 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

οπότε η εξίσωση παραγοντοποιημένη γράφεται:

$$X^2 \cdot (X-1) \cdot (X^2 - X - 1) = 0$$

βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5,$$

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

και έχουμε την εξίσωση σε τελική μορφή:

$$X^2 \cdot (X-1) \cdot \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.$$

Άρα ή

$X^2 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow 1 + i = 0 \Rightarrow i = -1$ η οποία απορρίπτεται

$X - 1 = 0 \Rightarrow X = 1 \Rightarrow 1 + i = 1 \Rightarrow i = 0$ η οποία απορρίπτεται

$$X - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0 \Rightarrow 1 + i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow i = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$$

η οποία απορρίπτεται και τέλος

$$X-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0\Rightarrow 1+i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow i=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

που είναι η μοναδική λύση που είναι δεκτή και δίνει αριθμητική τιμή $i\simeq 0,618$ άρα το επιτόκιο είναι ίσο με 61,8%.

4.3.1. Εύρεση του αρχικού κεφαλαίου

Για να βρούμε το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης (αρχική αξία) αρκεί να λύσουμε τον βασικό τύπο (1) ως προς K_0, οπότε θα έχουμε: $K_n=K_0\cdot(1+i)^n\Rightarrow K_0=\dfrac{K_n}{(1+i)^n}$ ή τελικά:

$$K_0=K_n\cdot\frac{1}{(1+i)^n} \tag{7}$$

Ο όρος $\dfrac{1}{(1+i)^n}$ είναι ο αντίστροφος του συντελεστή κεφαλαιοποίησης και τον ονομάζουμε συντελεστή προεξόφλησης.

Αν τον συντελεστή προεξόφλησης τον συμβολίσουμε με Y^n τότε ο τύπος (7) μπορεί να γραφεί στην μορφή $K_0=K_n\cdot Y^n$. Την εύρεση βέβαια του αρχικού κεφαλαίου μπορούμε να τη βρούμε είτε απευθείας από τον τύπο (5) βρίσκοντας την τιμή του συντελεστή κεφαλαιοποίησης από τους οικονομικούς πίνακες που βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου, είτε από τον παραπάνω τύπο εφόσον η τιμή του Y^n υπάρχει στους οικονομικούς πίνακες.

Αν ο χρόνος τοκισμού του κεφαλαίου δεν είναι ακέραιος τότε χρησιμοποιούμε όπως παραπάνω τη γραμμική ή την εκθετική μέθοδο.

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$K_{n+\frac{\mu}{12}}=K_0\cdot(1+i)^n\cdot(1+i)^{\frac{\mu}{12}}\Rightarrow K_0=K_{n+\frac{\mu}{12}}\cdot\frac{1}{(1+i)^n}\cdot\frac{1}{(1+i)^{\frac{\mu}{12}}}$$

ή τελικά:

$$K_0=K_{n+\frac{\mu}{12}}\cdot Y^n\cdot\frac{1}{(1+i)^{\frac{\mu}{12}}}$$

Και στην εύρεση της αρχικής αξίας αν το επιτόκιο ή ο χρόνος δεν υπάρχουν στους πίνακες μπορούμε να κάνουμε παρεμβολή εργαζόμενοι όπως και στην εύρεση της τελικής αξίας.

Παράδειγμα 9

Καταθέσαμε κεφάλαιο με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Μετά από 4 χρόνια και 6 μήνες πήραμε συνολικά €42.699. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε $i=0,04$, $n=2\times4+1=9$ και $K_9=42.699$

$$K_0=K_9\cdot\frac{1}{(1+0,04)^9}=42.699\cdot\frac{1}{1,4233}=30.000$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να παίρναμε απευθείας το πηλίκο $\dfrac{1}{(1+0,04)^9}$ από τους πίνακες.

Παράδειγμα 10

Κεφάλαιο κατατίθεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 7 χρόνια. Για όλη τη διάρκεια τοκισμού πήραμε τόκο ίσο με € 1.070,70. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο τοκισμού.

Λύση

Έχουμε: $i=0,08$, $n=7$ και $E_7=1.070,7$.

$$E_7 = K_7 - K_0 = K_0 \cdot (1+i)^7 - K_0 \Rightarrow$$
$$E_7 = K_0 \cdot \left[(1+i)^7 - 1\right] \Rightarrow K_0 = \frac{E_7}{(1+i)^7 - 1}$$
$$K_0 = \frac{1070,7}{1,08^7 - 1} = \frac{1070,7}{1,7138 - 1} = \frac{1070,7}{0,7138} \Rightarrow$$
$$K_0 = 1.500$$

4.3.2 Εύρεση του χρόνου

Για να βρούμε τον χρόνο n του ανατοκισμού ξεκινώντας από τη σχέση (1) έχουμε: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ και λύνουμε ως προς τον όρο $(1+i)^n$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τον χρόνο είτε
με τη βοήθεια λογαρίθμων
με τη βοήθεια των οικονομικών πινάκων.

Αναλυτικότερα έχουμε τα εξής:

(α) Με τη χρήση λογαρίθμων

Λύνοντας τη σχέση (1) έχουμε:

$$(1+i)^n = \frac{K_n}{K_0} \Rightarrow \log(1+i)^n = \log\frac{K_n}{K_0}$$

ή

$$n \cdot \log(1+i) = \log K_n - \log K_0 \Rightarrow$$
$$n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)} \qquad (8)$$

Βέβαια η χρήση του παραπάνω τύπου απαιτεί τη χρήση αριθμομηχανής για την εύρεση των λογαρίθμων.

(β) Με τους οικονομικούς πίνακες

Για να βρούμε το χρόνο, βρίσκουμε την τιμή του πηλίκου $\frac{K_n}{K_0}$ και στη συνέχεια αναζητούμε την τιμή αυτή στη στήλη του αντίστοιχου επιτοκίου i. Αν η τιμή του πηλίκου δεν υπάρχει στους πίνακες, τότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Παράδειγμα 11

Καταθέτουμε κεφάλαιο €4.500 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%, το οποίο γίνεται μαζί με τους τόκους του €6.229. Να βρεθεί ο χρόνος της κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε $K_0 = 4.500$, $K_n = 6.229$ και $i = 0,03$

(α) Αν υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης λογαρίθμων από τη σχέση (8) με αντικατάσταση θα πάρουμε:

$$n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)} = \frac{\log 6.229 - \log 4.500}{\log(1+0,03)} \Rightarrow$$
$$n = \frac{3,794 - 3,653}{0,0128} = \frac{0,141}{0,0128} \Rightarrow n \approx 11$$

Συνεπώς η κατάθεση έγινε για 11 περιόδους ή για 5 χρόνια και 6 μήνες (11 εξάμηνα).

(β) Με χρήση οικονομικών πινάκων έχουμε από τη βασική σχέση (1)

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{K_n}{K_o} \Rightarrow 1,03^n = \frac{6.229}{4.500} \Rightarrow 1,03^n = 1,3842$$

Αναζητούμε στους οικονομικούς πίνακες στη στήλη με επιτόκιο 3% την τιμή 1,3842 και παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε $n = 11$ εξάμηνα.

Παράδειγμα 12

Καταθέτουμε €5.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Στο τέλος της κατάθεσης παίρνουμε €6.500. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα της κατάθεσης.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 5.000$, $K_n = 6.500$ και $i = 0,06$

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n = \frac{K_n}{K_o} \Rightarrow 1,06^n = \frac{6.500}{5.000} \Rightarrow 1,06^n = 1,3$$

Αναζητούμε στους πίνακες στη στήλη με επιτόκιο 6% την τιμή 1,3. Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή δεν υπάρχει στον πίνακα αλλά βρίσκεται ανάμεσα από την 1,2625 που αντιστοιχεί σε 4 χρόνια και 1,3382 που αντιστοιχεί σε 5 χρόνια. Έτσι θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

$1,06^4 = 1,2625$
Με απλή μέθοδο των τριών βρίσκουμε:
$1,06^5 = 1,3382$

Για διαφορά 1 χρόνου έχουμε διαφορά στην τιμή 0,0757 (1,3382 –1,2625), για ποια διαφορά στον χρόνο θα έχουμε διαφορά στην τιμή 0,0375 (1,3-1,2625). Άρα

$$\begin{array}{|ll} 0,0757 & 1 \\ 0,0375 & X; \\ \hline \end{array} \Rightarrow X = 1 \cdot \frac{0,0375}{0,0757} \Rightarrow X = 0,495.$$

Συνεπώς η διάρκεια της κατάθεσης ήταν 4+0,495=4,495 δηλαδή περίπου 4,5 χρόνια.

Παράδειγμα 13

Μετά από πόσα χρόνια ένα κεφάλαιο ανατοκιζόμενο κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 9% αυξάνεται κατά τα 9/15 του;

Λύση

Έχουμε: $i = 0,09$, $K_n = K_0 + \frac{9}{15} \cdot K_0$

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση έχουμε:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow K_0 + \frac{9}{15} \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow$$

$$\frac{24}{15} \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow (1+0,09)^n = \frac{24}{15} \Rightarrow 1,09^n = 1,6$$

Ψάχνουμε στους πίνακες στη στήλη με επιτόκιο 9% ποια περίοδο αντιστοιχεί σε τιμή 1,6. Παρατηρούμε ότι: $1,09^5 = 1,5386$ ενώ $1,09^6 = 1,6771$. Έτσι έχουμε:

1 χρόνο → 0,1385
Χ; → 0,0614

$$X = 1 \cdot \frac{0,0614}{0,1385} \Rightarrow X = 0,4433.$$

Άρα το αρχικό κεφάλαιο θα χρειαστεί 5,4433 χρόνια για να αυξηθεί κατά τα $\frac{9}{15}$ του.

Παράδειγμα 14

Μετά από πόσο χρόνο κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% τριπλασιάζεται;

Λύση

Έχουμε ότι $K_n = 3 \cdot K_0$ και $i = 0,08$

Κάνουμε αντικατάσταση και βρίσκουμε:

$K_n = 3 \cdot K_0 \Rightarrow K_0 \cdot (1+i)^n = 3 \cdot K_0$ απαλείφουμε το K_0

και $(1+0,08)^n = 3 \Rightarrow 1,08^n = 3$

Βλέπουμε όμως ότι:

$$\begin{aligned}1,08^{14} &= 2,9372\\ 1,08^{15} &= 3,1722\end{aligned},$$

Κάνουμε παρεμβολή και έχουμε:

$$\left|\begin{array}{ll}1 & 0,235\ (3,1722-2,9372)\\ X; & 0,0628\ (3-2,9372)\end{array}\right. \Rightarrow X=\frac{0,0628}{0,235}=0,267$$

Άρα το αρχικό κεφάλαιο τριπλασιάζεται μετά από 14,267 χρόνια.

4.3.3. Εύρεση του επιτοκίου

Η εύρεση του επιτοκίου στον ανατοκισμό βρίσκεται με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για να βρούμε τον χρόνο. Έτσι επίσης λύνουμε τη σχέση (1) ως προς τον συντελεστή κεφαλαιοποίησης $(1+i)^n$ και στη συνέχεια αναζητούμε την τιμή του πηλίκου $\frac{K_n}{K_0}$ στους οικονομικούς πίνακες στη γραμμή του χρόνου *n*. Αν αυτή η τιμή δεν αντιστοιχεί σε κάποιο από τα επιτόκια εφαρμόζουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Παράδειγμα 15

Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο τοκίστηκε κεφάλαιο €6.000 και μετά από περίοδο 5 χρόνων έγινε μαζί με τους τόκους του €9.663,06.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 6.000$, $n = 5$ και $K_n = 9.663,06$

$$(1+i)^n=\frac{K_n}{K_0}\Rightarrow(1+i)^5=\frac{9.663,06}{6.000}\Rightarrow(1+i)^n=1,61051$$

Ψάχνουμε στους πίνακες στη γραμμή των 5 χρόνων σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί η τιμή 1,61051. Παρατηρούμε ότι

$$1,1^5=1,61051\Rightarrow(1+0,1)^5=1,61051$$

Άρα το επιτόκιο με το οποίο έγινε η κατάθεση είναι 10%.

Παράδειγμα 16

Κεφάλαιο €10.000 τοκίζεται για 7 χρόνια και γίνεται μαζί με τους τόκους του €17.700. Αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό να βρεθεί το αντίστοιχο επιτόκιο με το οποίο έγινε η κατάθεση.

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 10.000$, $n = 7$ και $K_n = 17.700$

$$(1+i)^n=\frac{K_n}{K_0}\Rightarrow(1+i)^7=\frac{17.700}{10.000}\Rightarrow(1+i)^7=1,77$$

Ψάχνουμε στους πίνακες στη γραμμή των 7 χρόνων να βρούμε την τιμή 1,8. Παρατηρούμε ότι:

$\begin{aligned}1,08^7 &= 1,7138\\ 1,09^7 &= 1,8280\end{aligned}$. Δηλαδή το επιτόκιο της κατάθεσης είναι μεταξύ του 8% και 9%. Έτσι έχουμε:

$$\begin{array}{ll}0,1142 & 0,01\\ 0,0562 & X;\end{array}\Rightarrow X=0,01\cdot\frac{0,0562}{0,1142}\Rightarrow X=0,00492.$$

Άρα το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης είναι

$$0,08+0,00492=0,08492\ (8,492\%).$$

4.3.4. Επιτόκια ισοδύναμα και ανάλογα

Όπως είδαμε, στον απλό τόκο, ένα κεφάλαιο δίνει σταθερά τον ίδιο τόκο σε όλη την διάρκεια του τοκισμού όποια περίοδο τοκισμού και αν επιλέξουμε. Προφανώς αυτό ισχύει γιατί οι τόκοι δεν ενσωματώνονται στο κεφάλαιο το οποίο παραμένει αμετάβλητο. Ας τοκίσουμε ένα κεφάλαιο €10.000 για 4 χρόνια με απλό τόκο και ετήσιο επιτόκιο 6%. Αν θεωρήσουμε ως περίοδο τοκισμού τον χρόνο: $n=4$ και $i=0,06$, ο τόκος που θα πάρουμε είναι:

$$I_4 = K \cdot n \cdot i = 10.000 \cdot 4 \cdot 0,06 = 2.400$$

το εξάμηνο: $n = 4 \times 2 = 8$ εξάμηνα και $i = \dfrac{0,06}{2} = 0,03$ τότε ο τόκος που θα πάρουμε θα ισούται με

$$I_8 = K \cdot n \cdot i = 10.000 \cdot 8 \cdot 0,03 = 2.400$$

το τετράμηνο: $n = 4 \times 3 = 12$ και $i = \dfrac{0,06}{3} = 0,02$ ο τόκος που θα πάρουμε είναι

$$I_{12} = K \cdot n \cdot i = 10.000 \cdot 12 \cdot 0,02 = 2.400$$

τον μήνα: $n = 4 \times 12 = 48$ και $i = \dfrac{0,06}{12} = 0,005$ ο τόκος θα είναι $I_{48} = K \cdot n \cdot i = 10.000 \cdot 48 \cdot 0,005 = 2.400$

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω παράδειγμα, όποια περίοδο τοκισμού και αν επιλεγεί, ο τόκος που θα πάρουμε για την περίοδο των 4 χρόνων θα είναι ίσος με €2.400. Τα επιτόκια αυτά, που το πηλίκο τους είναι ίσο με το πηλίκο των αντίστοιχων περιόδων λέγονται *ανάλογα επιτόκια*. Εδώ στο παράδειγμα μας τα επιτόκια 6%, 3%, 2%, 0,5% είναι ανάλογα.

Ας εξετάσουμε αν ισχύουν τα ίδια στον ανατοκισμό. Αν λύσουμε το προηγούμενο παράδειγμα για διάφορες περιόδους ανατοκισμού θα πάρουμε:

Έτσι αν περίοδος ανατοκισμού είναι:

Ο χρόνος η τελική αξία του κεφαλαίου είναι

$$K_4 = K_0 \cdot (1+i)^4 = 10.000 \cdot 1,06^4 = 10.000 \cdot 1,2625 = 12.625$$

Το εξάμηνο η τελική αξία του κεφαλαίου είναι

$$K_8 = K_0 \cdot (1+i)^8 = 10.000 \cdot 1,03^8 = 10.000 \cdot 1,2668 = 12.668$$

Το τετράμηνο η τελική αξία του κεφαλαίου είναι

$$K_{12} = K_0 \cdot (1+i)^{12} = 10.000 \cdot 1,02^{12} = 10.000 \cdot 1,2682 = 12.682$$

Ο μήνας η τελική αξία του κεφαλαίου είναι

$$K_{48} = K_0 \cdot (1+i)^{48} = 10.000 \cdot 1,005^{48} = 10.000 \cdot 1,2705 = 12.705$$

Παρατηρούμε ότι τα ανάλογα επιτόκια στον ανατοκισμό δεν δίνουν την ίδια τελική αξία, επομένως ούτε τον ίδιο τόκο. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, με ποιο επιτόκιο θα έπρεπε να τοκίσουμε ένα κεφάλαιο για να πάρουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο άρα και τον ίδιο τόκο; Το επιτόκιο αυτό θα το ονομάσουμε *ισοδύναμο επιτόκιο*.

Για την καλύτερη κατανόηση του ισοδύναμου επιτοκίου δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Κεφάλαιο τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 6 χρόνια. Να βρεθεί με ποιο εξαμηνιαίο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε το ίδιο κεφάλαιο για το ίδιο χρονικό διάστημα ώστε αν έχουμε εξαμηνιαίο ανατοκισμό να πάρουμε την ίδια τελική αξία.

Έχουμε $i = 0,08$ $n = 6$ χρόνια ή 12 εξάμηνα.

Για να πάρουμε την ίδια τελική αξία πρέπει:

$$K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot (1+x)^{2 \cdot n}$$

όπου x είναι το εξαμηνιαίο επιτόκιο. Άρα απλοποιώντας το K_0 θα έχουμε:

$$(1+0,08)^6 = (1+x)^{12} \Rightarrow (1+x)^{12} = 1,08^6 \Rightarrow$$

$$(1+x)^{12} = 1,5869\,.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$1,035^{12} = 1,5111$$

και

$$1,04^{12} = 1,6010\,.$$

Δηλαδή:

$$\left|\begin{array}{ll} 0,005 & 0,0899 \\ X; & 0,0758 \end{array}\right. \Rightarrow X = 0,005 \cdot \frac{0,0758}{0,0899} \Rightarrow X = 0,0042\,.$$

Οπότε τελικά το ισοδύναμο επιτόκιο είναι ίσο με

$$x = 0,035 + 0,0042 \Rightarrow x = 0,0392 \text{ ή } 3,92\%\,.$$

Ισοδύναμα επιτόκια θα λέγονται δύο επιτόκια τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και δίνουν σε ένα κεφάλαιο την ίδια τελική αξία όταν ανατοκίζεται συνολικά για τον ίδιο χρόνο.

Ας γενικεύσουμε όμως το παραπάνω παράδειγμα ώστε να μπορέσουμε να βρούμε έναν τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορούμε να βρίσκουμε το ισοδύναμο επιτόκιο όταν είναι γνωστό το πραγματικό επιτόκιο (i).

Ας υποθέσουμε ότι η συνολική διάρκεια του ανατοκισμού είναι n ακέραιες περίοδοι. Τότε μπορούμε να χωρίσουμε την κάθε περίοδο σε m ίσες κλασματικές χρονικές περιόδους. Έτσι προφανώς έχουν συνολικά δημιουργηθεί $n \times m$ κλασματικές περίοδοι.

Από τον παραπάνω ορισμό των ισοδύναμων επιτοκίων θα έχουμε:

$$K_0 \cdot (1+i_m)^{n \cdot m} = K_0 \cdot (1+i)^n$$

όπου K_0 έχουμε συμβολίσει το αρχικό κεφάλαιο

i_m το επιτόκιο της κλασματικής περιόδου

i το επιτόκιο της ακέραιης περιόδου

Αν απαλείψουμε το K_0 θα έχουμε αντίστοιχα

$$(1+i_m)^{n \cdot m} = (1+i)^n \Rightarrow$$
$$(1+i_m)^m = 1+i \tag{9}$$

$$\Rightarrow 1+i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow$$
$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \tag{10}$$

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω έχουμε ότι:

Τα επιτόκια i και i_m είναι ισοδύναμα

Τα επιτόκια i και $\dfrac{i}{m}$ είναι ανάλογα

Το επιτόκιο i λέγεται πραγματικό επιτόκιο

Το επιτόκιο $J_m = m \cdot i_m$ λέγεται ονομαστικό επιτόκιο συχνότητας m

Τα επιτόκια i_m και J_m είναι ανάλογα

Από τη σχέση $J_m = m \cdot i_m$ προκύπτει ότι $i_m = \dfrac{J_m}{m}$.

Από τη σχέση (9) προκύπτει ότι

$$(1+i_2)^2 = (1+i_3)^3 = (1+i_4)^4 = (1+i_6)^6 = (1+i_{12})^{12} = 1+i$$

Παράδειγμα 17

Κεφάλαιο τοκίζεται με ετήσιο ονομαστικό επιτόκιο 10%. Να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο αν ο ανατοκισμός είναι: (α) εξαμηνιαίος (β) τριμηνιαίος

Λύση

(α) Έχουμε: για $m = 2$, $\dfrac{10\%}{2} = 5\%$

$$i = (1+i_m)^m - 1 = 1{,}05^2 - 1 = 0{,}1025$$

Δηλαδή το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε εξάμηνο είναι: $10{,}25\%$

(β) Έχουμε: για $m = 4$, $\dfrac{10\%}{4} = 2{,}5\%$

Άρα $i = (1+i_m)^m - 1 = 1{,}025^4 - 1 = 0{,}1038$

Δηλαδή το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο αν ο ανατοκισμός γίνεται κάθε τρίμηνο είναι: $10{,}38\%$

Παράδειγμα 18

Το ετήσιο επιτόκιο είναι 10%. Ζητείται το εξαμηνιαίο και το τριμηνιαίο ανάλογο και ισοδύναμο επιτόκιο.

Λύση

(α) Το ανάλογο εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{10\%}{2} = 5\% = 0,05$ ενώ το ανάλογο τριμηνιαίο είναι:

$$\frac{10\%}{4} = 2,5\% = 0,025$$

(β) Για το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο έχουμε:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \Rightarrow i_2 = (1+0,1)^{\frac{1}{2}} - 1,$$

επειδή όμως από τους οικονομικούς πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις με κλασματικό εκθέτη που έχουν παρονομαστή 12, αντίστοιχα θα έχουμε:

$$i_2 = (1+0,1)^{\frac{6}{12}} - 1 = 1,1^{\frac{6}{12}} - 1 = 1,0488 - 1 = 0,0488$$

Άρα το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι $4,88\%$

Για το ισοδύναμο τριμηνιαίο επιτόκιο έχουμε:

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \Rightarrow i_4 = (1+0,1)^{\frac{1}{4}} - 1,$$

αντίστοιχα έχουμε:

$$i_4 = (1+0,1)^{\frac{3}{12}} - 1 = 1,1^{\frac{3}{12}} - 1 = 1,0241 - 1 = 0,0241$$

Άρα το ισοδύναμο τριμηνιαίο επιτόκιο είναι $2,41\%$.

Παράδειγμα 19

Αν το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι 8% να βρεθεί το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο αν ο ανατοκισμός είναι (α) εξαμηνιαίος (β) τριμηνιαίος

Λύση

(α) Έχουμε: $i = 0,08$ και $m = 2$

$$J_m = m \cdot i_m \Rightarrow J_m = m \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$J_2 = 2 \cdot \left[(1+0,08)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 2 \cdot \left(1,08^{\frac{6}{12}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$J_2 = 2 \cdot (1,0392 - 1) = 2 \cdot 0,0392 = 0,0784$$

Δηλαδή το ονομαστικό επιτόκιο είναι $7,84\%$

(β) Αντίστοιχα έχουμε: $i = 0,08$ και $m = 4$

$$J_m = m \cdot i_m \Rightarrow J_m = m \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$J_4 = 4 \cdot \left[(1+0,08)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] = 2 \cdot \left(1,08^{\frac{3}{12}} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$J_4 = 4 \cdot (1,0194 - 1) = 4 \cdot 0,0194 = 0,0776$$

Δηλαδή το ονομαστικό επιτόκιο είναι $7,76\%$

Παράδειγμα 20

Αν έχουμε μηνιαίο ανατοκισμό και μηνιαίο επιτόκιο 1% να βρεθεί το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο.

Λύση

Οι περισσότεροι καταναλωτές όταν ακούν για επιτόκιο 1% τον μήνα, για να βρουν το αντίστοιχο ετήσιο επιτόκιο κάνουν το γινόμενο $12 \times 1\% = 12\%$. Είναι σωστή όμως η απάντηση αυτή;

Από τη σχέση (9) έχουμε:

$$i = (1+i_{12})^{12} - 1 \Rightarrow i = (1+0,01)^{12} - 1 \Rightarrow$$

$$i = 1{,}01^{12} - 1 \Rightarrow i = 1{,}1268 - 1 \Rightarrow i = 0{,}1268$$

Άρα τελικά το πραγματικό ετήσιο επιτόκιο είναι $12{,}68\%$.

4.3.5. Μέσο επιτόκιο στον ανατοκισμό

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μ διαφορετικά κεφάλαια ($K_1, K_2, ...K_\mu$) τα οποία τοκίζονται με μ διαφορετικά επιτόκια ($i_1, i_2, ...,i_\mu$) αντίστοιχα για το ίδιο χρονικό διάστημα *n*. Θέλουμε να βρούμε το μέσο επιτόκιο της κατάθεσης δηλαδή με ποιο κοινό επιτόκιο *x* (μέσο επιτόκιο) αν τοκίζαμε όλα τα αρχικά κεφάλαια θα παίρναμε την ίδια τελική αξία με αυτήν που θα πάρουμε με τα μ διαφορετικά επιτόκια; Η τελική αξία στην πρώτη περίπτωση θα είναι:

$$K_1 \cdot (1+i_1)^n + K_2 \cdot (1+i_2)^n + ... + K_\mu \cdot (1+i_\mu)^n \tag{11}$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε:

$$K_1 \cdot (1+x)^n + K_2 \cdot (1+x)^n + ... + K_\mu \cdot (1+x)^n \text{ ή}$$

$$(K_1 + K_2 + ... + K_\mu) \cdot (1+x)^n \tag{12}$$

Εξισώνουμε τις σχέσεις (11) και (12) και έχουμε:

$$(1+x)^n = \frac{K_1 \cdot (1+i_1)^n + K_2 \cdot (1+i_2)^n + ... + K_\mu \cdot (1+i_\mu)^n}{K_1 + K_2 + ... + K_\mu}$$

$$x = \left\{ \frac{K_1 \cdot (1+i_1)^n + K_2 \cdot (1+i_2)^n + ... + K_\mu \cdot (1+i_\mu)^n}{K_1 + K_2 + ... + K_\mu} \right\}^{\frac{1}{n}} - 1$$

που είναι και ο τύπος που δίνει το μέσο επιτόκιο από μ κεφάλαια που τοκίζονται με μ διαφορετικά επιτόκια για τον ίδιο χρόνο *n*.

Παράδειγμα 21

Τρία κεφάλαια αξίας €1.500, €3.000 και €4.500 τοκίζονται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσια επιτόκια 4%, 7% και 10% αντίστοιχα για 5 χρόνια. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.

Λύση

Έχουμε: $K_1 = 1.500$, $K_2 = 3.000$, $K_3 = 4.500$, $i_1 = 0{,}04, i_2 = 0{,}07$, $i_1 = 0{,}1$ και $n = 5$.

$$x = \left\{ \frac{K_1 \cdot (1+i_1)^n + K_2 \cdot (1+i_2)^n + ... + K_\mu \cdot (1+i_\mu)^n}{K_1 + K_2 + ... + K_\mu} \right\}^{\frac{1}{n}} - 1 \Rightarrow$$

$$x = \left\{ \frac{1.500 \cdot (1+0{,}04)^5 + 3.000 \cdot (1+0{,}07)^5 + 4.500 \cdot (1+0{,}1)^5}{1.500 + 3.000 + 4.500} \right\}^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow$$

$$x = \left\{ \frac{1.500 \cdot 1{,}1699 + 3.000 \cdot 1{,}4026 + 4.500 \cdot 1{,}6105}{1.500 + 3.000 + 4.500} \right\}^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow$$

$$x = \left\{ \frac{1.754{,}85 + 4.207{,}8 + 7.247{,}25}{1.500 + 3.000 + 4.500} \right\}^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow$$

$$x = \left\{ \frac{13.209{,}9}{9.000} \right\}^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow x = 1{,}4678^{\frac{1}{5}} - 1 \Rightarrow x \approx 0{,}08$$

Άρα το μέσο επιτόκιο είναι 8%.

4.3.6. Προεξόφληση στον ανατοκισμό

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο στην προεξόφληση στον απλό τόκο έχουμε τρία μεγέθη, την ονομαστική αξία, την παρούσα αξία και το προεξόφλημα. Τα ίδια ισχύουν και όταν έχουμε προεξόφληση με ανατοκισμό. Την οποία χρησιμοποιούμε συνήθως όταν ο χρόνος προεξόφλησης είναι μεγάλος (συνήθως μεγαλύτερος από 1 χρόνο). Στην περίπτωση αυτή η ονομαστική αξία συμβολίζεται με K_n , η παρούσα αξία με K_0 και το προεξόφλημα με (E) και είναι η διαφορά των δύο παραπάνω μεγεθών (K_n - K_0).

Στα περισσότερα προβλήματα γνωρίζουμε την ονομαστική αξία της συναλλαγματικής και θέλουμε να βρούμε την ονομαστική αξία καθώς και το προεξόφλημα. Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις στις οποίες γνωρίζουμε την παρούσα αξία και ζητάμε να βρούμε τα άλλα δύο μεγέθη. Έτσι έχουμε:

Μπορούμε να βρούμε το προεξόφλημα ως συνάρτηση της παρούσας αξίας, δηλαδή:

$$E = K_n - K_0 = K_0 \cdot (1+i)^n - K_0 \Rightarrow$$

$$E = K_0 \cdot \left[(1+i)^n - 1 \right]$$

είτε ως συνάρτηση της ονομαστικής αξίας.

$$E = K_n - K_0 = K_n - \frac{K_n}{(1+i)^n} \Rightarrow$$

$$E = K_n \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] = K_n \cdot \left(1 - Y^n \right)$$

Στις περιπτώσεις που έχουμε προεξόφληση με ανατοκισμό χρησιμοποιούμε αποκλειστικά την εσωτερική προεξόφληση σε αντίθεση με την προεξόφληση στον απλό τόκο που συνήθως χρησιμοποιούμε την εξωτερική προεξόφληση.

Παράδειγμα 22

Επιταγή ονομαστικής αξίας €6.000 που λήγει μετά από 6 χρόνια, προεξοφλείται εσωτερικώς σήμερα με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8%. Να βρεθούν η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε $K_n = 6.000$, $n = 6$ και $i = 0,08$.

$$E = K_n \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] \Rightarrow E = 6.000 \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+0,08)^6} \right]$$

$$E = 6.000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1,5869} \right) = 6.000 \cdot 0,3698 = 2.218,8$$

Άρα το προεξόφλημα είναι €2.218,8, οπότε η παρούσα αξία είναι ίση με:

$$K_0 = K_n - E = 6.000 - 2.218,8 = 3.781,2$$

4.3.7. Ισοδυναμία στον ανατοκισμό

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, αν έχουμε κάποιες οφειλές στις οποίες δεν μπορούμε να ανταποκριθούμε και θελήσουμε να αντικαταστήσουμε τις οφειλές αυτές (γραμμάτια) με κάποιες άλλες πρέπει να ισχύει η αρχή της ισοδυναμίας. Αν το διάστημα της λήξης των γραμματίων αυτών είναι αρκετά μεγάλο τότε συνήθως έχουμε ανατοκισμό. Όπως στον απλό τόκο έτσι και στον ανατοκισμό σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, πρέπει το άθροισμα από τις παρούσες αξίες των γραμματίων που είχα πριν την αντικατάσταση, να είναι ίσο με το άθροισμα από τις παρούσες αξίες των γραμματίων που θα έχω μετά.

Έστω ότι έχουμε k γραμμάτια τα οποία θα αντικατασταθούν από m γραμμάτια. Τότε:

Αν εποχή ισοδυναμίας είναι η μέρα υπολογισμού τότε από την αρχή της ισοδυναμίας θα έχουμε:

$$K_{0_1} + K_{0_2} + ... + K_{0_k} = K'_{0_1} + K'_{0_2} + ... + K'_{0_m} \text{ ή}$$

$$K_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + K_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2}} + ... + K_{n_k} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_k}} = K'_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + K'_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2}} + ... + K'_{n_m} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_m}}$$

Αν τώρα έχουμε να αντικαταστήσουμε m γραμμάτια ονομαστικής αξίας $K_{n_1}, K_{n_2}, ..., K_{n_m}$,που λήγουν σε αντίστοιχα χρονικά διαστήματα $n_1, n_2, ..., n_m$ με ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας K και λήξης n τότε θα έχουμε:

Αν εποχή ισοδυναμίας είναι η μέρα υπολογισμού τότε:

$$K_0 = K_{0_1} + K_{0_2} + ... + K_{0_m} \Rightarrow$$

$$K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = K_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + K_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2}} + ... + K_{n_m} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_m}} \tag{13}$$

ενώ για εποχή ισοδυναμίας την κοινή λήξη θα έχουμε:

$$K_0 = K_{0_1} + K_{0_2} + ... + K_{0_m} \Rightarrow$$

$$K_n = K_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1-n}} + K_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2-n}} + ... + K_{n_m} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_m-n}} \tag{14}$$

Προφανώς αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (13) με τον όρο $(1+i)^n$ θα πάρουμε τη σχέση (14). Αυτό σημαίνει ότι όποια και από τις δύο εποχές ισοδυναμίας και αν χρησιμοποιήσουμε θα βρούμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα σε αντίθεση βέβαια με τον απλό τόκο που τα αποτελέσματα όπως είδαμε ήταν διαφορετικά.

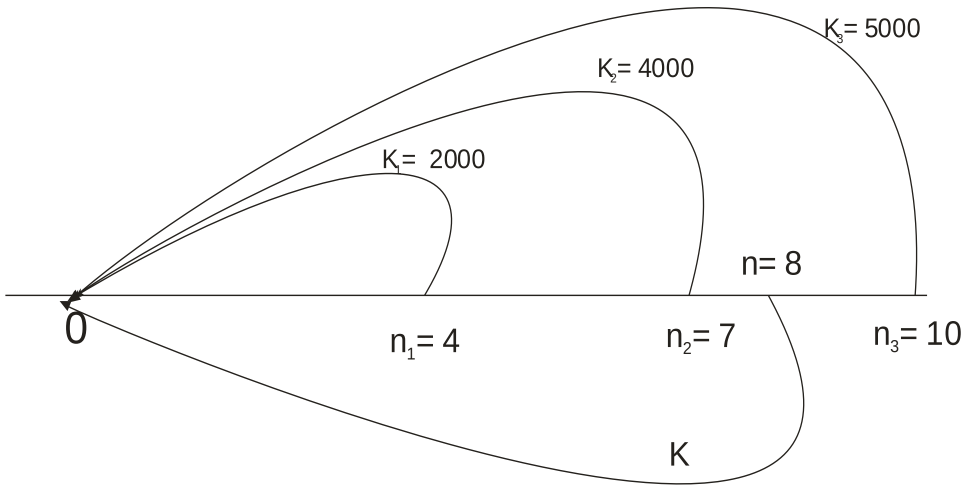
Παράδειγμα 23

Έμπορος οφείλει €2.000 μετά από 2 χρόνια, €4.000 μετά από 3 χρόνια και 6 μήνες και €5.000 μετά από 5 χρόνια. Αν έχουμε εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%, να βρεθεί τι ποσό πρέπει να δώσει μετά από 4 χρόνια για να εξοφλήσει το χρέος του αν εποχή ισοδυναμίας είναι (α) Η μέρα υπολογισμού (β) Η κοινή λήξη.

Λύση

Έχουμε: $K_{n_1} = 2.000$, $K_{n_2} = 4.000$, $K_{n_3} = 5.000$, $i = 0,05$, $n_1 = 2 \times 2 = 4$, $n_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$, $n_3 = 2 \times 5 = 10$, $n = 2 \times 4 = 8$

(α) Εποχή ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού σχήμα 4.2:



Σχήμα 4.2 *Εποχή ισοδυναμίας η μέρα υπολογισμού.*

$$K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = K_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1}} + K_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2}} + K_{n_3} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_3}} \Rightarrow$$

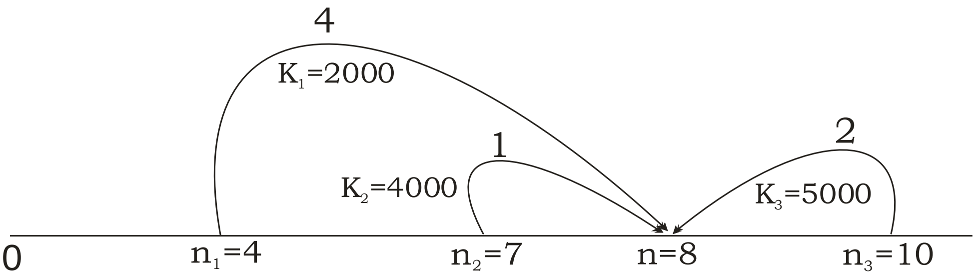
$$K_8 \cdot \frac{1}{1,05^8} = 2.000 \cdot \frac{1}{1,05^4} + 4.000 \cdot \frac{1}{1,05^7} + 5.000 \cdot \frac{1}{1,05^{10}} \Rightarrow$$

$$K_8 \cdot \frac{1}{1,4775} = 2.000 \cdot \frac{1}{1,2155} + 4.000 \cdot \frac{1}{1,4071} + 5.000 \cdot \frac{1}{1,6289} \Rightarrow$$

$$K_8 \cdot \frac{1}{1,4775} = 1.645,41 + 2.842,73 + 3.069,56 \Rightarrow$$

$$K_8 \approx 11.166$$

(β) Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη σχήμα 4.3:



Σχήμα 4.3 *Εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.*

$$K_n = K_{n_1} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_1-n}} + K_{n_2} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_2-n}} + K_{n_3} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n_3-n}}$$

$$K_8 = 2.000 \cdot \frac{1}{1,05^{-4}} + 4.000 \cdot \frac{1}{1,05^{-1}} + 5.000 \cdot \frac{1}{1,05^{2}}$$

$$K_8 = 2.000 \cdot 1,05^4 + 4.000 \cdot 1,05^1 + 5.000 \cdot \frac{1}{1,05^2}$$

$$K_8 = 2.431 + 4.200 + 4.535,15$$

$$K_8 \approx 11.166$$

Προφανώς όπως και περιμέναμε το αποτέλεσμα και στις δύο περιπτώσεις είναι το ίδιο.

4.4. Ασκήσεις

4.4.1 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Μια τράπεζα τοκίζει τις καταθέσεις μας με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 7%. Υπόσχεται όμως στο τέλος των 20 ετών από την ημέρα της κατάθεσης να πριμοδοτεί τις καταθέσεις μας διπλασιάζοντας τους τόκους. Με ποιο επιτόκιο θα είχαμε το ίδιο τελικό ποσό μετά από 20 έτη;

Λύση

Προφανώς οι τόκοι που θα πάρουμε κατά τη διάρκεια των 20 χρόνων θα υπολογίζονται από τη διαφορά:

$$I_{20} = K_{20} - K_0 = K_0 \cdot (1+i)^{20} - K_0 = K_0 \cdot \left[(1+i)^{20} - 1\right]$$

Συνεπώς έχουμε:

$$(1+i_1)^{20} = 1 + 2 \cdot \left(1,07^{20} - 1\right) \Rightarrow (1+i_1)^{20} = 2 \cdot 1,07^{20} - 1 \Rightarrow$$

$$(1+i_1)^{20} = 6,7394$$

Ψάχνουμε στους πίνακες στη γραμμή για 20 χρόνια σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί η τιμή 6,7394. Παρατηρούμε ότι $1,1^{20} = 6,7275$

Άρα το επιτόκιο που μας έδωσε τελικά η τράπεζα ήταν 10%.

Άσκηση 2

Κεφάλαια €2000, €4500 και €6000 τοκίζονται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσια επιτόκια 5%, 7% και 10% αντίστοιχα για 10 χρόνια. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο με τα οποίο τοκίστηκαν τα κεφάλαια.

Λύση

Έχουμε: $K_{0_1} = 2.000$, $K_{0_2} = 4.500$ και $K_{0_3} = 6.000$

$$i_1 = 0,05,\ i_2 = 0,07 \text{ και } i_3 = 0,1,\ n = 10$$

Θέλουμε να βρούμε με ποιο κοινό επιτόκιο (χ) θα παίρναμε τον ίδιο τόκο με αυτόν που πήραμε τοκίζοντας τα κεφάλαια με τα επιτόκια i_1, i_2, i_3.

$$\text{Άρα } K_{n_1} + K_{n_2} + K_{n_3} = K'_{n_1} + K'_{n_2} + K'_{n_3} \Rightarrow$$

$$K_{0_1} \cdot (1+i_1)^{n_1} + K_{0_2} \cdot (1+i_2)^{n_2} + K_{0_3} \cdot (1+i_3)^{n_3} =$$

$$K_{0_1} \cdot (1+x)^{n_1} + K_{0_2} \cdot (1+x)^{n_2} + K_{0_3} \cdot (1+x)^{n_3} \Rightarrow$$

$$2000 \cdot 1,05^{10} + 4500 \cdot 1,07^{10} + 6000 \cdot 1,1^{10} =$$

$$\left(K_{0_1} + K_{0_2} + K_{0_3}\right) \cdot (1+x)^{10} \Rightarrow$$

$$2.000 \cdot 1,6289 + 4.500 \cdot 1,9672 + 6.000 \cdot 2,5937 =$$

$$12.500 \cdot (1+x)^{10} \Rightarrow$$

$$27.672,4 = 12.500 \cdot (1+x)^{10} \Rightarrow (1+x)^{10} = 2,2138.$$

Ψάχνουμε στη γραμμή για $n = 10$ σε ποιο επιτόκιο αντιστοιχεί η τιμή 2,2138. Παρατηρούμε ότι:

$$1,08^{10} = 2,1589 \text{ και } 1,09^{10} = 2,3674$$

$$\left.\begin{array}{|ll} 0,01\ (0{,}09\text{-}0{,}08) & 0,2085\ (2,3674 - 2,1589) \\ X; & 0,0549\ (2,2138 - 2,1589) \end{array}\right. \Rightarrow X = 0,01 \cdot \frac{0,0549}{0,2085} = 0,01 \cdot 0,2633 \Rightarrow X = 0,002633.$$

Άρα το μέσο επιτόκιο είναι 8,2633%.

Άσκηση 3

Επιταγή ονομαστικής αξίας €5.500 προεξοφλείται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%, 4 χρόνια και 8 μήνες πριν τη λήξη της. Να βρεθεί η παρούσα αξία και το προεξόφλημα.

Λύση

Έχουμε: $K_n = 5.500$, $i = 0,04$ τα 4 χρόνια = 8 εξάμηνα και οι 8 μήνες είναι 1 εξάμηνο και 2 μήνες. Δηλαδή $n = 9$ και $\mu = 4$. Άρα

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \Rightarrow K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}}} \Rightarrow$$

$$K_0 = \frac{5.500}{(1+0,04)^9 \cdot (1+0,04)^{\frac{4}{12}}} = \frac{5.500}{1,04^9 \cdot 1,04^{\frac{4}{12}}} = \frac{5.500}{1,4233 \cdot 1,0132} \Rightarrow$$

$$K_0 = 3.813,92.$$

Για το προεξόφλημα έχουμε:

$$E = K_n - K_0 \Rightarrow E = 5.500 - 3.813,92 \Rightarrow E = 1.686,08.$$

Άσκηση 4

Τοκίσαμε €9.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 6 χρόνια. Για πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε το ίδιο κεφάλαιο με το ίδιο επιτόκιο στον απλό τόκο για να πάρουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο;

Λύση

Έχουμε: $K_0 = 9.000$, $i = 0,08$ και $n = 6$.

Για την κατάθεση με ανατοκισμό θα πάρουμε:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = 9.000 \cdot 1,08^6 = 9.000 \cdot 1,5869 \Rightarrow K_6 = 14.282,1$$

Στον απλό τόκο αντίστοιχα:

$$K_0 + I = 14.282,1 \Rightarrow 9.000 + I = 14.282,1 \Rightarrow I = 5.282,1$$

$$K \cdot n_1 \cdot i = 5.282,1 \Rightarrow 9.000 \cdot n_1 \cdot 0,08 = 5.282,1$$

$$720 \cdot n_1 = 5.282,1 \Rightarrow n_1 = \frac{5.282,1}{720} \Rightarrow n_1 = 7,34$$

ή σε μέρες:

$$\nu_1 = \frac{5.282,1 \cdot 360}{9.000 \cdot 0,08} \Rightarrow \nu_1 = \frac{1.901.556}{720} \Rightarrow \nu_1 = 2.641.$$

Άσκηση 5

Καταθέσαμε σήμερα €10.000 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια και 8 μήνες. Αποσύρουμε τότε €6.500 και στη συνέχεια ο ανατοκισμός γίνεται ετήσιος, και το επιτόκιο ετήσιο και ίσο με 8%. Να βρεθεί το ποσό που θα σχηματισθεί μετά 15 χρόνια από σήμερα.

Λύση

Για την πρώτη φάση της κατάθεσης έχουμε:

6 χρόνια = 12 εξάμηνα και

8 μήνες = 1 εξάμηνο και 2 μήνες. Άρα

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \Rightarrow K_n = 10.000 \cdot 1,05^{13} \cdot 1,05^{\frac{4}{12}}$$

$$K_n = 10.000 \cdot 1,8856 \cdot 1,0164 \Rightarrow K_n = 19.165,24.$$

Έτσι στο τέλος των 6 ετών και 8 μηνών έχουμε €19.165,24 οπότε και αποσύρουμε €6.500, άρα στον λογαριασμό μας θα υπάρχουν $19.165,24 - 6.500 = 12.665,24$.

Το συνολικό διάστημα της κατάθεσης είναι 15 χρόνια, έχουν περάσει 6 χρόνια και 8 μήνες άρα μας μένουν ακόμη 8 χρόνια και 4 μήνες. Έτσι έχουμε:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{\frac{\mu}{12}} \Rightarrow K_n = 12.665,24 \cdot 1,08^8 \cdot 1,08^{\frac{4}{12}}$$

$$K_n = 12.665,24 \cdot 1,85 \cdot 1,026 \Rightarrow K_n = 24.039,89.$$

Άσκηση 6

Κεφάλαιο κατατίθεται στον απλό τόκο με έτος μικτό για 120 μέρες με επιτόκιο 6%. Το συνολικό ποσό που δημιουργήθηκε, κατατέθηκε με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 8% για 5 χρόνια. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας πήραμε συνολικά €5.245,5. Να βρεθεί το αρχικό κεφάλαιο κατάθεσης.

Λύση

Για τη διαδικασία του ανατοκισμού έχουμε: $K_n = 5.245,5$, $n = 5$ και $i = 0,08$

Άρα $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow 5.245,5 = K_0 \cdot (1+0,08)^5 \Rightarrow K_0 = \frac{5.245,5}{1,4693} \Rightarrow K_0 = 3.570$

Για τη διαδικασία του απλού τόκου έχουμε:

$$K + I = 3.570 \Rightarrow K + \frac{K \cdot \nu \cdot i}{360} = 3.570 \Rightarrow K + \frac{K \cdot 120 \cdot 0,06}{360} = 3.570$$

$$K + 0,02 \cdot K = 3.570 \Rightarrow 1,02 \cdot K = 3.570 \Rightarrow K = \frac{3.570}{1,02} \Rightarrow K = 3.500$$

4.4.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Κεφάλαιο €30.000 τοκίστηκε με ετήσιο ανατοκισμό για 8 χρόνια 5 μήνες και 12 μέρες με ετήσιο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί η τελική του αξία.
2. Κεφάλαιο €18.000 τοκίστηκε με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 2%. Τέσσερα έτη μετά την αρχική κατάθεση, το επιτόκιο άλλαξε και έγινε 3%. Να βρεθεί το τελικό ποσό που θα σχηματιστεί 8 χρόνια μετά την αλλαγή του επιτοκίου.
3. Σε πόσα χρόνια κεφάλαιο που ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 6% θα τριπλασιαστεί;
4. Κεφάλαια €40.000, €80.000 και €50.000 ανατοκίζονται κάθε χρόνο με ετήσια επιτόκια 5%, 6% και 8% αντίστοιχα για 5 έτη. Να βρεθεί το μέσο επιτόκιο.
5. Τοκίζουμε ένα μέρος του κεφαλαίου μας με ετήσιο επιτόκιο 8% και το υπόλοιπο με 6%. Αν το συνολικό κεφάλαιο που θα πάρουμε σε τρία χρόνια είναι €9.871,61 ενώ το αρχικό μας κεφάλαιο ήταν €8.000, να βρεθούν τα ποσά που τοκίστηκαν με τα δύο επιτόκια.
6. Αν τοκίσουμε κεφάλαιο €25.000 με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5% για 8 χρόνια, να βρεθεί για πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε το ίδιο κεφάλαιο με το ίδιο επιτόκιο με απλό τόκο, για να εισπράξουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο και στις δύο περιπτώσεις.

7. Κεφάλαιο €4.500 τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6% για 10 χρόνια. Να βρεθούν (α) Οι τόκοι των 10 ετών, (β) Οι τόκοι του 10ου έτους, (γ) Οι τόκοι του 3ου και του 4ου έτους μαζί και (δ) Οι τόκοι των άρτιων ετών.
8. Κεφάλαιο €25.000 κατατέθηκε στην τράπεζα με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και με εξαμηνιαίο επιτόκιο 5%. Πέντε χρόνια μετά την αρχική κατάθεση ο ανατοκισμός έγινε ετήσιος και το ετήσιο επιτόκιο έγινε 4%. Να βρεθεί τι ποσό θα σχηματισθεί 8 χρόνια μετά την αλλαγή του επιτοκίου.
9. Σε πόσα χρόνια κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 7% αυξάνεται κατά τα 4/5 του;
10. Κεφάλαιο τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό για 5 χρόνια. Να βρεθούν οι τελικές αξίες του κεφαλαίου στο τέλος κάθε έτους. Αν οι τόκοι κατά τη διάρκεια του 2ου έτους είναι μεγαλύτεροι από τους τόκους του 1ου έτους κατά €230, ενώ οι τόκοι κατά τη διάρκεια του 4ου έτους είναι μεγαλύτεροι από τους τόκους του 3ου έτους κατά €250, να βρεθούν το επιτόκιο, το αρχικό και το τελικό κεφάλαιο.
11. Συναλλαγματική €10.000 που λήγει μετά 8 χρόνια από σήμερα αντικαθίσταται με 3 συναλλαγματικές. Η πρώτη είναι ονομαστικής αξίας €2.000 και λήγει μετά από 2 χρόνια, η δεύτερη είναι ονομαστικής αξίας €4.000 και λήγει μετά από 5 χρόνια. Ποια είναι η αξία της τρίτης συναλλαγματικής η οποία λήγει σε 6 χρόνια, αν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%;
12. Ένας πατέρας αποφάσισε να διαθέσει ένα ποσό € 70.000 στα τρία παιδιά του, που είναι σήμερα 9, 12 και 16 ετών. Επιθυμεί όμως να πάρει το κάθε παιδί τέτοιο ποσό, ώστε, αν έχουμε εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%, να πάρουν όλα τα παιδιά του το ίδιο ποσό όταν θα γίνουν 21 ετών. Να βρεθεί το ποσό που θα πάρει το κάθε παιδί σήμερα.
13. Καταθέτουμε σήμερα €8.000 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Μετά από 3 χρόνια και 6 μήνες αποσύρουμε €3.000 και αφήνουμε τα υπόλοιπα για 5 χρόνια ακόμα. Να βρεθεί το τελικό κεφάλαιο.
14. Ένα κεφάλαιο τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό. Να βρεθεί το επιτόκιο αν τριπλασιασθεί σε 12 χρόνια.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 5

5. Ράντες

5.1. Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί

Είναι σύνηθες στις μέρες μας να καταθέτουν οι γονείς κάποιο ποσό για τα παιδιά τους σε μηνιαία, εξαμηνιαία ή ετήσια βάση έτσι ώστε να συσσωρευτεί κάποιο ποσό το οποίο θα λάβουν με την ενηλικίωση τους για να καλύψουν το κόστος των σπουδών.

Επίσης μπορεί κάποιος να καταθέτει ένα ποσό σε τακτά χρονικά διαστήματα έτσι ώστε να πάρει το συσσωρευμένο ποσό κοντά στη συνταξιοδότηση του ή για να πάρει μια συμπληρωματική σύνταξη. Θα δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Ένας πατέρας καταθέτει την ημέρα γέννησης του παιδιού του το ποσό των €1.000 και στη συνέχεια καταθέτει κάθε χρόνο €1.000 έως ότου το παιδί να συμπληρώνει το 17^{ο} έτος της ηλικίας του (18 φορές). Ποιο είναι το ποσό που θα συσσωρευτεί όταν συμπληρώσει το 18^{ο} έτος της ηλικίας του;

Λύση

Υποθέτουμε ότι όλα αυτά τα χρόνια το επιτόκιο είναι ετήσιο και σταθερό ίσο με 5% και ο ανατοκισμός είναι επίσης ετήσιος. Θα γίνουν συνολικά 18 καταθέσεις.

Το ποσό της 1^{ης} κατάθεσης (γέννηση του παιδιού) θα τοκισθεί για 18 έτη δηλαδή θα γίνει

$$1.000(1+i)^n = 1.000(1+0,05)^{18}$$

Το ποσό της 2^{ης} κατάθεσης (πρώτα γενέθλια του παιδιού) θα τοκισθεί για 17 έτη δηλαδή θα γίνει

$$1.000(1+i)^{n-1} = 1.000(1+0,05)^{17}$$

Το ποσό της 3^{ης} κατάθεσης θα τοκισθεί για 16 έτη δηλαδή θα γίνει

$$1.000(1+i)^{n-2} = 1.000(1+0,05)^{16}$$

Τέλος το ποσό της τελευταίας κατάθεσης (συμπλήρωση του 17^{ου} έτους) θα τοκισθεί μόνο για 1 έτος

$$1.000(1+i) = 1.000(1+0,05)$$

Το συνολικό ποσό στο τέλος του 18^{ου} έτους είναι:

$$1.000(1+i)^n + 1.000(1+i)^{n-1} + 1.000(1+i)^{n-2} + \cdots + 1.000(1+i) =$$

$$= 1.000(1+i)\left((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1\right) =$$

$$= 1.000(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = 1.000(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i} =$$

$$= 1.000(1+0,05)\frac{(1+0,05)^{18} - 1}{0,05} = 29.539$$

Το παιδί θα εισπράξει €29.539.

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος κάναμε χρήση του τύπου:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x-1}$$

Τα παραδείγματα που αναφέραμε αφορούν χρηματικά ποσά τα οποία καταβάλλονται ανά ίσα, τακτά χρονικά διαστήματα. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ράντα ή Χρηματική ροή ή χρηματοσειρά ονομάζεται μια σειρά χρηματικών ποσών που καταβάλλονται σε ίσα τακτά χρονικά διαστήματα.

Τα χρηματικά ποσά που καταβάλλονται ονομάζονται **όροι** της ράντας. Ο όρος συμβολίζεται με **R.**

Λήξη ενός όρου ονομάζεται η ημέρα κατά την οποία καταβάλλεται ο όρος αυτός.

Μια ράντα λέγεται **σταθερή** όταν όλοι οι όροι της είναι ίσοι. Στην ειδική περίπτωση που όλοι οι όροι είναι ίσοι με τη μονάδα η ράντα ονομάζεται **μοναδιαία**.

Περίοδος μιας ράντας είναι το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της καταβολής δύο διαδοχικών όρων.

Αρχή της ράντας είναι η αρχή της πρώτης περιόδου και **τέλος** της ράντας είναι το τέλος της τελευταίας περιόδου.

Ανάλογα με το πότε γίνεται η καταβολή του όρου οι ράντες διακρίνονται σε **ληξιπρόθεσμες** και **προκαταβλητέες**:

- Ληξιπρόθεσμη όταν η καταβολή του πρώτου όρου γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου
- Προκαταβλητέα όταν η καταβολή του όρου γίνεται στην αρχή της περιόδου.

Ακέραιη λέγεται μια ράντα όταν η περίοδος της και η περίοδος στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο συμπίπτουν. Στη συνέχεια της μελέτης μας και όταν δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό θα θεωρούμε ότι έχουμε ακέραιη ράντα.

Μια ράντα ονομάζεται **πρόσκαιρη** όταν το πλήθος των όρων της είναι καθορισμένο και **διηνεκής** όταν το πλήθος των όρων είναι άπειρο. Θα ασχοληθούμε με πρόσκαιρες ράντες.

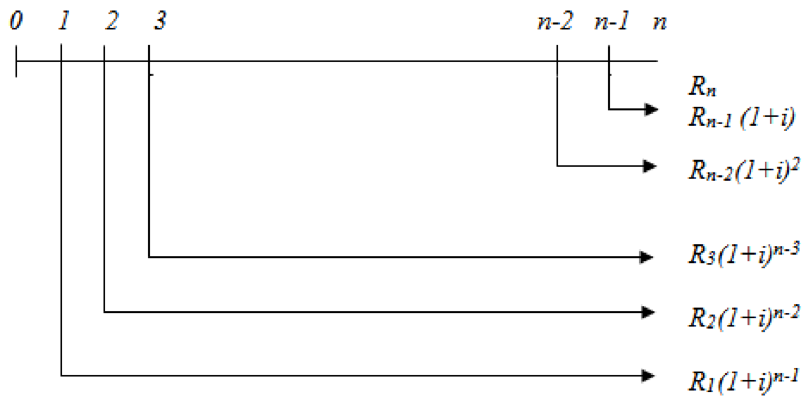
Συνεπώς η ράντα του παραδείγματος μας είναι πρόσκαιρη, προκαταβλητέα, σταθερή με όρο *R=1000*, ακέραιη με περίοδο ένα έτος και το πλήθος των περιόδων είναι *n=18*. Το ζητούμενο είναι η της ράντας στο τέλος της.

Τελική αξία μιας ράντας ονομάζεται η αξία που έχει η ράντα στο τέλος της και **αρχική αξία** η αξία που έχει στην αρχή.

5.2. Τελική αξία

5.2.1 Τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

Έστω n το πλήθος των όρων. Αφού η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη ο όρος καταβάλλεται στο τέλος της κάθε περιόδου. (Σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1 *Τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας*

Συνεπώς ο πρώτος όρος R_1 τοκίζεται για $(n-1)$ περιόδους, ο δεύτερος όρος .. τοκίζεται για $(n-2)$ περιόδους, ο τρίτος όρος R_3 τοκίζεται για $(n-3)$ περιόδους κ.ο.κ.

Ο τελευταίος όρος R_n δεν τοκίζεται καθόλου αφού το τέλος της τελευταίας περιόδου συμπίπτει με το τέλος της ράντας.

Ο προτελευταίος όρος R_{n-1} τοκίζεται για μια περίοδο, ο R_{n-2} τοκίζεται για δύο περιόδους κ.ο.κ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε για την τελική αξία την οποία συμβολίζουμε με $S_{\overline{n|}\,i}$.

$$S_{\overline{n|}\,i} = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + \cdots + R_{n-2}(1+i)^2 + R_{n-1}(1+i) + R_n$$

ή

$$S_{\overline{n}|\,i} = \sum_{k=1}^{n} R_k \left(1+i\right)^{n-k} .$$

5.2.2. Τελική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας

Έστω ληξιπρόθεσμη ράντα με σταθερό όρο ίσο με τη μονάδα

$$R_1 = R_2 = \cdots R_n = R = 1.$$

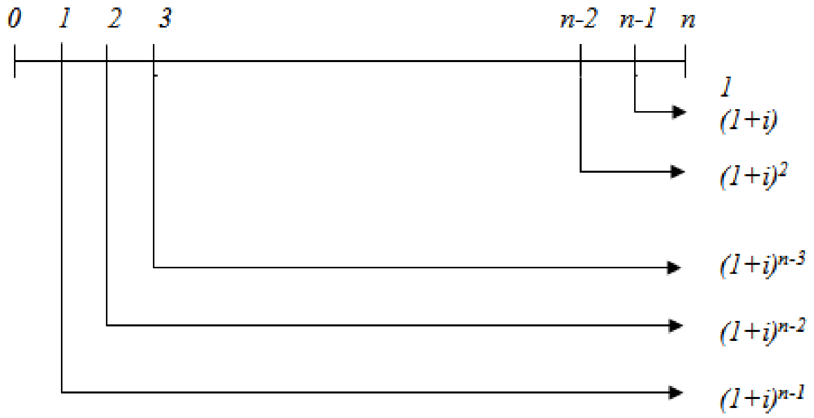
Τότε η τελική αξία (σχήμα 5.2) συμβολίζεται με $s_{\overline{n}|\,i}$ (το s είναι μικρό) και είναι ίση με:

$$s_{\overline{n}|\,i} = \left(1+i\right)^{n-1} + \left(1+i\right)^{n-2} + \cdots + \left(1+i\right)^{2} + \left(1+i\right) + 1 =$$

$$= \frac{\left(1+i\right)^{n} - 1}{\left(1+i\right) - 1} = \frac{\left(1+i\right)^{n} - 1}{i}$$

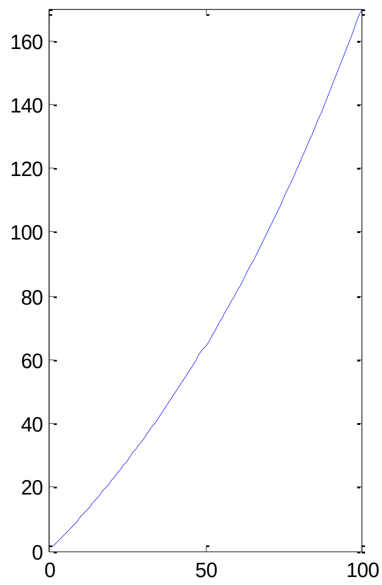
Έτσι έχουμε τον τύπο:

$$s_{\overline{n}|\,i} = \frac{\left(1+i\right)^{n} - 1}{i}$$



Σχήμα 5.2 *Τελική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας*

Στο παρακάτω σχήμα 5.3 έχουμε τη γραφική παράσταση της τελικής αξίας μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας για επιτόκιο 1% ως προς το πλήθος των όρων.



Σχήμα 5.3 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης* $s_{\overline{n}|\,0,01}$ *για* $n \in [0,100]$

5.2.3. Τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας σταθερού όρου R

Αν η ράντα έχει ίσους όρους

$$R_1 = R_2 = \cdots R_n = R$$

Η τελική αξία είναι:

$$S_{\overline{n}|\,i} = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i)^2 + R(1+i) + R$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το σταθερό R

$$S_{\overline{n}|\,i} = R\left((1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)^2 + (1+i) + 1\right)$$

Μέσα στην παρένθεση έχουμε την τελική αξία μοναδιαίας ράντας, συνεπώς:

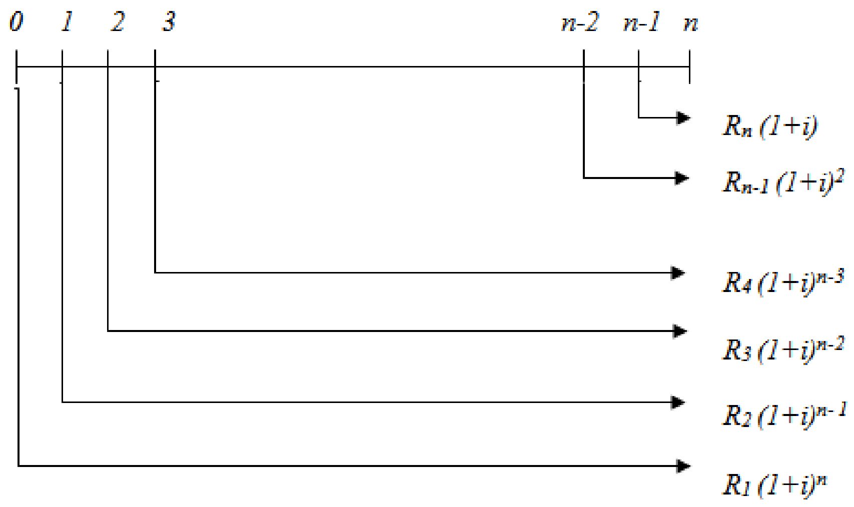
$$S_{\overline{n}|\,i} = R \cdot s_{\overline{n}|\,i}$$

5.2.4 Τελική αξία προκαταβλητέας ράντας

Έστω n το πλήθος των όρων. Αφού η ράντα είναι προκαταβλητέα ο όρος καταβάλλεται στην αρχή της κάθε περιόδου.

Συνεπώς ο πρώτος όρος R_1 τοκίζεται για n περιόδους, ο δεύτερος όρος R_2 τοκίζεται για $(n-1)$ περιόδους, ο τρίτος όρος R_3 τοκίζεται για $(n-2)$ περιόδους κ.ο.κ.

Ο τελευταίος όρος R_n τοκίζεται για μία περίοδο, ο προτελευταίος όρος R_{n-1} τοκίζεται για δύο περιόδους, ο R_{n-2} τοκίζεται για τρεις περιόδους κ.ο.κ.



Σχήμα 5.4 *Τελική αξία προκαταβλητέας ράντας*

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε για την τελική αξία:

$$R_1(1+i)^n + R_2(1+i)^{n-1} + \cdots + R_{n-2}(1+i)^3 + R_{n-1}(1+i)^2 + R_n(1+i) = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n+1-k}$$

Παρατηρούμε ότι αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το $(1+i)$ προκύπτει η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

$$\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n+1-k} = (1+i)\sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k} = (1+i) S_{\overline{n}|\, i}$$

Συνεπώς η τελική αξία μιας προκαταβλητέας ράντας ΄πως φαίνεται και στο σχήμα 5.4 είναι ίση με την τελική αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης ράντας πολλαπλασιασμένη επί $(1+i)$. Αυτό είναι λογικό αφού κάθε όρος τοκίζεται μια επιπλέον περίοδο.

Η ράντα του παραδείγματος 1 είναι προκαταβλητέα και η τελική της αξία μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή των παραπάνω τύπων ως εξής:

$$(1+i) R \cdot s_{\overline{n}|\, i} = 1,05 \cdot 1.000 \cdot s_{\overline{18}|\, 0,05} = 1,05 \cdot 1.000 \cdot 28,1324 = 29.538,6$$

Παράδειγμα 2

Ποιά είναι η τελική αξία σταθερής ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων με όρο €500; Το επιτόκιο είναι 7%.

Λύση

Θα βρούμε την τελική αξία της αντίστοιχης μοναδιαίας ράντας από τους σχετικούς πίνακες

$$s_{\overline{10}|\, 0,07} = \frac{1,07^{10} - 1}{0,07} = 13,8164$$

Μετά πολλαπλασιάζουμε με τον όρο που είναι €500

$$S_{\overline{10}|\, 0,07} = R \cdot s_{\overline{10}|\, 0,07} = 500 \cdot 13,8164 = 6.908,2\,.$$

Η ζητούμενη τελική αξία είναι €6.908,2.

Παράδειγμα 3

Ποιά είναι η τελική αξία αν έχουμε 20 όρους;

Λύση

$$s_{\overline{20}|\, 0,07} = \frac{1,07^{20} - 1}{0,07} = 40,99$$

και

$$S_{\overline{20}|\, 0,07} = R \cdot s_{\overline{20}|\, 0,07} = 500 \cdot 40,99 = 20.495$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέτει κάποιος στην τράπεζα στην αρχή κάθε έτους έτσι ώστε σε 25 έτη να εισπράξει το ποσό των €50.000 ένα χρόνο μετά την τελευταία κατάθεση. Το επιτόκιο είναι 5%.

Λύση

Θα κάνει 25 καταθέσεις και θα εισπράξει το συσσωρευμένο ποσό ένα έτος μετά την τελευταία κατάθεση. Συνεπώς έχουμε προκαταβλητέα ράντα 25 όρων. Η τελική αξία της είναι ίση με την τελική αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης ράντας πολλαπλασιασμένη με $1+i=1{,}05$.

Η τελική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας 25 όρων είναι:

$$s_{\overline{25|}\,0{,}05}=47{,}7271$$

Για την προκαταβλητέα μοναδιαία ράντα η τελική αξία είναι

$$s_{\overline{n|}\,0{,}01}\left(1+i\right)=47{,}7271\cdot 1{,}05=50{,}1135\,.$$

Συνεπώς ο όρος πρέπει να είναι

$$R=\frac{50.000}{50{,}1135}=997{,}74$$

Παράδειγμα 5

Ληξιπρόθεσμη ράντα 20 όρων με όρο €200 έχει τελική αξία €10.232. Με ποιο επιτόκιο έγινε ο ανατοκισμός;

Λύση

Η τελική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας 20 όρων θα είναι

$$s_{\overline{20|}\,\mathrm{i}}=\frac{S_{\overline{20|}\,\mathrm{i}}}{200}=\frac{10.232}{200}=51{,}16$$

Από τους πίνακες έχουμε ότι αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε επιτόκιο 9%.

Παράδειγμα 6

Ληξιπρόθεσμη ράντα 15 όρων με όρο €500 έχει τελική αξία €10.000. Με ποιο επιτόκιο έγινε ο ανατοκισμός;

Λύση

Η τελική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας 20 όρων θα είναι

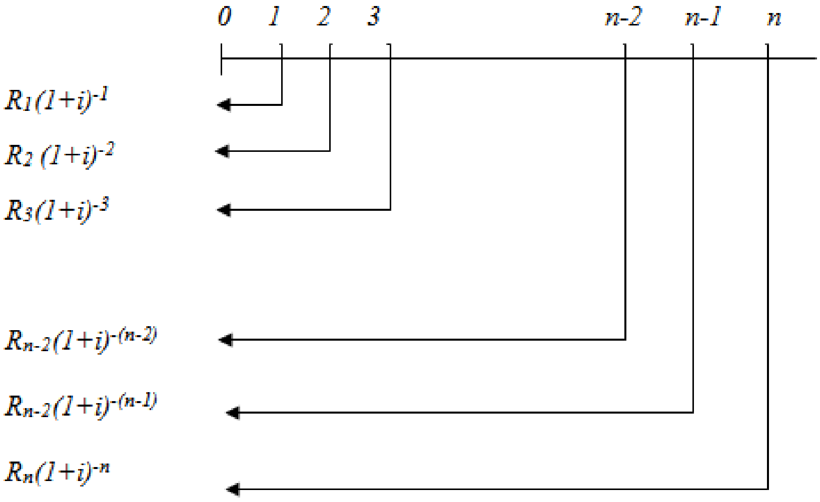
$$s_{\overline{15|}\,\mathrm{i}}=\frac{S_{\overline{15|}\,\mathrm{i}}}{500}=\frac{10.000}{500}=20$$

Από τους πίνακες έχουμε ότι αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε 15 όρους γιατί $s_{\overline{15|}\,0{,}04}=20{,}0236$.

5.3. Αρχική αξία

5.3.1. Αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας

Υπολογίζουμε την αξία κάθε όρου στην αρχή της ράντας



Σχήμα 5.5 *Αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας*

Συνεπώς αφού η αρχική αξία της ράντας είναι το άθροισμα των αξιών των όρων στην αρχή της ράντας έχουμε

$$A_{\overline{n}|i} = R_1(1+i)^{-1} + R_2(1+i)^{-2} + R_3(1+i)^{-3} + \cdots + R_n(1+i)^{-n}$$
$$= \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \frac{R_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^n} =$$
$$\frac{1}{(1+i)^n}\left(R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + R_3(1+i)^{n-3} + \cdots + R_n\right)$$

Μέσα στην παρένθεση έχουμε την τελική αξία της ράντας.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$A_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^n} S_{\overline{n}|i}$$

ή

$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^n A_{\overline{n}|i}$$

Αυτό έχει και την ακόλουθη εξήγηση:

Αφού η αξία της ράντας στην αρχή της είναι $A_{\overline{n}|i}$ στο τέλος της, δηλαδή μετά από n περιόδους ανατοκισμού γίνεται $(1+i)^n A_{\overline{n}|i}$.

Θα μπορούσαμε να γράψουμε τα παραπάνω με το συμβολισμό αθροίσματος

$$A_{\overline{n}|i} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} =$$
$$= \frac{1}{(1+i)^n} \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k} = (1+i)^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{n} R_k (1+i)^{n-k} =$$
$$= (1+i)^{-n} S_{\overline{n}|i}$$

Όλα τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα 5.5.

5.3.2. Αρχική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας

Αντίστοιχα με τα παραπάνω η αρχική αξία της μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων είναι

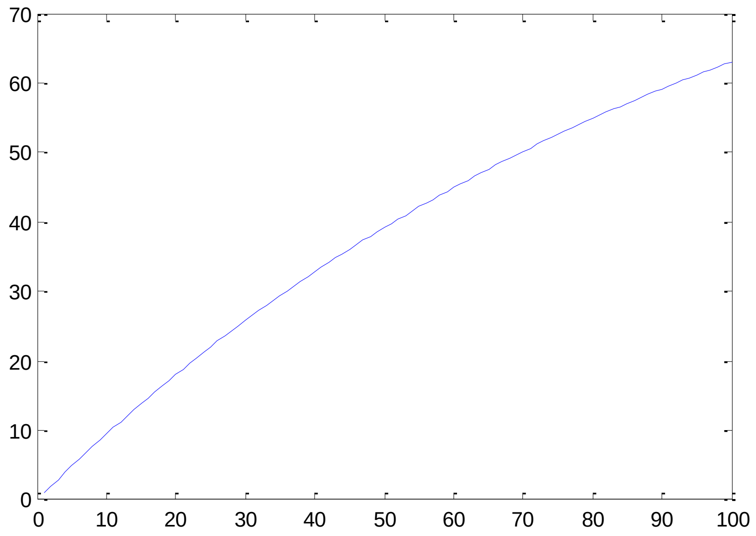
$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1}{(1+i)^n} s_{\overline{n}|\,i}$$

ή

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1}{(1+i)^n} \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow$$

$$a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Στο σχήμα 5.6 βλέπουμε την γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης για επιτόκιο $i = 0{,}01$ ως προς τον πλήθος των όρων n.

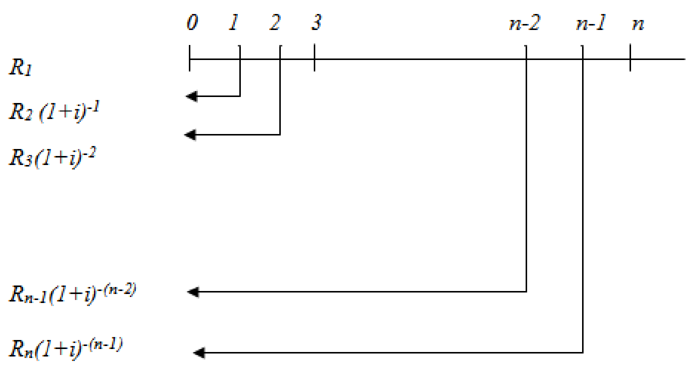


Σχήμα 5.6 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης* $a_{\overline{n}|\,0{,}01}$ *για* $n \in [0,100]$.

Για να βρούμε την αρχική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας σταθερού όρου R πολλαπλασιάζουμε την αρχική αξία της αντίστοιχης μοναδιαίας ράντας $a_{\overline{n}|\,i}$ με τον όρο R.

5.3.3. Αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας

Για την αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας (σχήμα 5.7) έχουμε:



Σχήμα 5.7 *Αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας*

$$R_1 + R_2(1+i)^{-1} + R_3(1+i)^{-2} + \cdots + R_n(1+i)^{-(n-1)} =$$
$$= R_1 + \frac{R_2}{(1+i)} + \frac{R_3}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R_n}{(1+i)^{n-1}} =$$
$$= \frac{1}{(1+i)^n}\Big(R_1(1+i)^n + R_2(1+i)^{n-1} + R_3(1+i)^{n-2} + \cdots + R_n(1+i)\Big)$$

Στην τελευταία παρένθεση έχουμε την αρχική αξία της ράντας.

Άρα και πάλι πάμε από την αρχική στην τελική αξία πολλαπλασιάζοντας με $(1+i)^n$, ενώ αντίστροφα για να πάμε από την τελική στην αρχική αξία διαιρούμε με $(1+i)^n$.

Και πάλι η αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας είναι ίση με την αρχική αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης ράντας πολλαπλασιασμένη με $(1+i)$.

Στον πίνακα 5.1 παραθέτουμε όλους τους χρήσιμους τύπους για τον υπολογισμό της αξίας μιας ράντας.

Τελική Αξία Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας $s_{\overline{n}\rvert i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Αρχική Αξία Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας $a_{\overline{n}\rvert i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
Σχέση Αρχικής και Τελικής Αξίας Μοναδιαίας Ληξιπρόθεσμης Ράντας $a_{\overline{n}\rvert i} = \frac{1}{(1+i)^n} s_{\overline{n}\rvert i}$
Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας $S_{\overline{n}\rvert i} = R \cdot s_{\overline{n}\rvert i} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Αρχική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας $A_{\overline{n}\rvert i} = R \cdot a_{\overline{n}\rvert i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντα $(1+i)\cdot S_{\overline{n}\rvert i} = (1+i)\cdot R \cdot s_{\overline{n}\rvert i} = (1+i)\cdot R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$
Αρχική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας $(1+i)A_{\overline{n}\rvert i} = (1+i)\cdot R \cdot a_{\overline{n}\rvert i} = (1+i)\cdot R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Πίνακας 5.1 *Χρήσιμοι τύποι*

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές σε όσα αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Παράδειγμα 7

Ένας παππούς ρωτάει τον εγγονό του που αρχίζει τις σπουδές του σε ένα τμήμα της ανώτατης εκπαίδευσης αν προτιμά να του δώσει την 1η Οκτωβρίου, €14.000 ή να του καταθέτει €800 κάθε τρίμηνο από την 1η Οκτωβρίου για πέντε έτη. Υποθέτουμε τριμηνιαίο επιτόκιο 1%.

Λύση

Θα γίνουν 4 καταθέσεις κάθε χρόνο άρα συνολικά 20 καταθέσεις. Δηλαδή έχουμε προκαταβλητέα ράντα 20 όρων και μας ενδιαφέρει να βρούμε την αρχική αξία της για να συγκρίνουμε με το ποσό των €8.000.

Η αρχική αξία της προκαταβλητέας ράντας είναι ίση με την αρχική αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης πολλαπλασιασμένης με $(1+i)$.

Συνεπώς η ζητούμενη αρχική αξία είναι

$$V=(1+i)A_{\overline{n}|\,i}=(1+i)\cdot R\cdot a_{\overline{n}|\,i}=(1+0,01)\cdot 800\cdot a_{\overline{20}|\,0,01}=$$
$$=1,01\cdot 800\cdot 18,04555=14.581$$

διαφορετικά

$$V=(1+i)A_{\overline{n}|\,i}=(1+i)\cdot R\frac{1}{(1+i)^{n}}s_{\overline{n}|\,i}=R\frac{1}{(1+i)^{n-1}}s_{\overline{n}|\,i}=$$
$$=800\frac{1}{1,01^{19}}s_{\overline{20}|\,0,01}=800\frac{1}{1,2081}22,019=14.581$$

Η διαφορά είναι €581.

Παράδειγμα 8

Κάποιος καταθέτει στην τράπεζα €1000 κάθε χρόνο αρχίζοντας από το 40ο έτος της ηλικίας του, με ετήσιο επιτόκιο 5% και ετήσιο ανατοκισμό. Στην αρχή του 60ου έτους αδυνατεί να πληρώσει αλλά αποφασίζει να τα αφήσει στην τράπεζα κλεισμένα για 5 έτη όπου θα ανατοκίζονται εξαμηνιαία με εξαμηνιαίο προνομιακό επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει όταν συμπληρώσει το 65ο έτος της ηλικίας του.

Λύση

Αρχικά ζητάμε την τελική αξία προκαταβλητέας ράντας η οποία έχει 20 όρους

$$V=(1+i)S_{\overline{n}|\,i}=(1+i)\cdot R\cdot s_{\overline{n}|\,i}=(1+0,05)\cdot 1.000\cdot s_{\overline{20}|\,0,05}=$$
$$=1,05\cdot 1.000\cdot 33,06595=34.719$$

Στη συνέχεια το ποσό που σχηματίστηκε $V=34.719$ τοκίζεται για 5 έτη εξαμηνιαία δηλαδή για 10 περιόδους με επιτόκιο 3%, από τον τύπο του ανατοκισμού έχουμε

$$V_{final}=(1+0,03)^{10}\cdot V=1,03^{10}\cdot 34.719=$$
$$=1,3439\cdot 34.719=46.659$$

Το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του 65ου έτους της ηλικίας του είναι €46.659.

5.4. Μέλλουσα και αρξάμενη ράντα

Παράδειγμα 9

Για να εξοφληθεί ένα δάνειο που υπογράφεται σήμερα συμφωνείται να πληρωθούν 10 ετήσιες δόσεις των €5.000 στο τέλος κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο 10% και ετήσιο ανατοκισμό. Επίσης συμφωνείται η πρώτη δόση να πληρωθεί τέσσερα έτη από σήμερα. Να βρεθεί το ποσό του δανείου.

Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα αφού κάθε δόση πληρώνεται στο τέλος του έτους. Θα βρούμε πρώτα την αρχική αξία της ράντας, αυτή είναι η αξία της σε 3 έτη από σήμερα.

$$V=A_{\overline{n}|\,i}=R\cdot a_{\overline{n}|\,i}=5.000\cdot a_{\overline{10}|\,0,10}=$$
$$=5.000\cdot 6,144567=30.723$$

Αφού η αξία της ράντας σε 3 έτη από σήμερα είναι $V=30.723$ η σημερινή της αξία θα είναι

$$V_{today}=(1+i)^{-3}\cdot V=1,1^{-3}\cdot 30.723=23.083$$

Το ποσό του δανείου που παίρνει ο δανειζόμενος είναι €23.083.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε μέλλουσα ράντα η οποία αρχίζει $\lambda = 3$ περιόδους από σήμερα.

Γενικά για την παρούσα αξία μέλλουσας ράντας η οποία αρχίζει λ περιόδους από σήμερα έχουμε τα εξής.

Για ληξιπρόθεσμη μοναδιαία ράντα:

$$(1+i)^{-\lambda} \cdot a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{-\lambda} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ή

$$\frac{a_{\overline{n}|\,i}}{(1+i)^{\lambda}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i \cdot (1+i)^{\lambda}}$$

Για προκαταβλητέα μοναδιαία ράντα:

$$(1+i)^{-\lambda} \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{-\lambda+1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ή

$$\frac{(1+i) \cdot a_{\overline{n}|\,i}}{(1+i)^{\lambda}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i \cdot (1+i)^{\lambda-1}}$$

Όμοια μπορούμε να βρούμε την παρούσα αξία μέλλουσας σταθερής ράντας.

Παράδειγμα 10

Ένας έμπορος αγόρασε από ένα προμηθευτή είδη τα οποία μπορεί να πληρώσει σε 10 ετήσιες δόσεις των €6.000 στο τέλος κάθε έτους με ετήσιο επιτόκιο 7% ή να πληρώσει όλη την αξία, 3 έτη μετά την αγορά. Ποιο ποσό θα πρέπει να πληρώσει 3 έτη μετά την αγορά; Ποια είναι η αξία των ειδών σήμερα;

Λύση

Ζητάμε την αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων, με κάθε όρο ίσο με €6.000 τρία έτη μετά την έναρξη.

Θα βρούμε την αρχική αξία της ράντας η οποία είναι

$$V = A_{\overline{n}|\,i} = R \cdot a_{\overline{n}|\,i} = 6.000 \cdot a_{\overline{10}|\,0,07} = 6.000 \cdot 7,023582 = 42.141$$

Αφού θα έχουν περάσει 3 έτη η αξία θα είναι

$$(1+i)^3 \cdot V = (1+0,07)^3 \cdot 42.141 = 51.625$$

Συνεπώς η αρχική αξία των ειδών που αγόρασε ο έμπορος είναι €42.141 και αν τα πληρώσει μετά από 3 έτη θα είναι €51.625.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση αυτή ζητάμε την παρούσα αξία αρξάμενης ράντας σε χρόνο λ περιόδους από την αρχή της.

Η παρούσα αξία αρξάμενης ληξιπρόθεσμης μοναδιαίας ράντας σε χρόνο λ περιόδους από την αρχή της είναι:

$$(1+i)^{\lambda} \cdot a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{\lambda} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Η παρούσα αξία αρξάμενης προκαταβλητέας μοναδιαία ράντας σε χρόνο λ περιόδους από την αρχή της είναι:

$$(1+i)^{\lambda} \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^{\lambda+1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Όμοια μπορούμε βρούμε την παρούσα αξία **αρξάμενης σταθερής** ράντας.

5.5. Μέση λήξη

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει μετά τη μελέτη των παραδειγμάτων 9 και 10 είναι σε ποια χρονική στιγμή η αξία της ράντας είναι ίση με το άθροισμα των όρων τους.

Γενικά ισχύει ότι η αρχική αξία είναι μικρότερη από την τελική αξία.

$$A_{\overline{n}|\,i} < S_{\overline{n}|\,i}$$

Για τη ληξιπρόθεσμη ράντα σταθερού όρου αλλά και για την προκαταβλητέα αφού και τα δύο μέλη της ανισότητας πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό $(1+i)$. Για μοναδιαία ράντα επίσης έχουμε:

$$a_{\overline{n}|\,i} < s_{\overline{n}|\,i}$$

Ζητάμε το λ για το οποίο ισχύει:

$$A_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n \cdot R$$

Από τη σχέση μεταξύ αρχικής και τελικής αξίας έχουμε

$$A_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{n} = S_{\overline{n}|\,i} \Rightarrow$$

$$A_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} \cdot (1+i)^{n-\lambda} = S_{\overline{n}|\,i} \Rightarrow$$

$$A_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = S_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda-n}$$

Δηλαδή ζητάμε το λ για το οποίο ισχύει:

$$A_{n|i}\,(1+i)^{\lambda} = n\,R = S_{n|i}\,(1+i)^{\lambda-n}$$

Η χρονική στιγμή κατά την οποία η παρούσα αξία της ράντας είναι ίση με το άθροισμα των όρων της ονομάζεται **μέση λήξη των όρων** της ράντας. Η μέση λήξη της ράντας είναι ανεξάρτητη του όρου της, πραγματικά

$$A_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n \cdot R \Rightarrow R \cdot a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n \cdot R \Rightarrow a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n$$

Μπορούμε να βρούμε το λ εργαζόμενοι ως εξής:

$$a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n \Rightarrow (1+i)^{\lambda} = \frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}}$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $a^{x} = e^{x \cdot \ln a}$

$$e^{\lambda \cdot \ln(1+i)} = \frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}} \Rightarrow \lambda \cdot \ln(1+i) = \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}}\right).$$

Από όπου έχουμε

$$\lambda = \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}}\right) / \ln(1+i).$$

Παράδειγμα 11

Να βρεθεί η μέση λήξη των όρων ράντας 10 όρων με ετήσιο επιτόκιο 5% και ετήσιο ανατοκισμό.

Λύση

Θέλουμε

$$a_{\overline{n}|\,i} \cdot (1+i)^{\lambda} = n \Rightarrow$$

$$a_{\overline{10}|\,0,05} \cdot (1+0,05)^{\lambda} = 10 \Rightarrow$$

$$7,721735 \cdot 1,05^{\lambda} = 10 \Rightarrow$$

$$1,05^{\lambda} = \frac{10}{7,721735} \Rightarrow$$

$$1,05^{\lambda} = 1,295$$

Από τους πίνακες έχουμε ότι $1,05^{5} = 1,2763$ και $1,05^{6} = 1,3401$ συνεπώς το λ είναι μεταξύ του 5 και του 6 (πλησιέστερα στο 5).

Διαφορετικά έχουμε

$$\lambda = \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}}\right) / \ln(1+i) \Rightarrow \lambda = \ln\left(\frac{10}{7,721735}\right) / \ln(1,05) \Rightarrow$$

$$\lambda = 5,299 \Rightarrow \lambda \simeq 5,3$$

Αν θεωρήσουμε 20 όρους με το ίδιο επιτόκιο θα έχουμε για τη μέση λήξη

$$(1+0,05)^{\lambda} = \frac{20}{a_{\overline{20}|\,0,05}} = \frac{20}{12,46221} = 1,60485$$

Από τους πίνακες έχουμε ότι

$$1,55133 = (1+0,05)^{9} < 1,60485 < (1+0,05)^{10} = 1,62889$$

Συνεπώς η μέση λήξη είναι περίπου 10 έτη.

Αλλιώς από τον τύπο

$$\lambda = \frac{1}{\ln(1+i)} \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,i}}\right) = \frac{1}{\ln(1.05)} \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,0,05}}\right) \approx 20,5 \ln\left(\frac{n}{a_{\overline{n}|\,0,05}}\right)$$

Για 20 έτη έχουμε

$$\lambda \approx 9,7$$

Θα μπορούσε να σχηματίσει κανείς λανθασμένα την εντύπωση πως η μέση λήξη είναι κοντά στο μισό του πλήθους των όρων.

Από τα παραπάνω προκύπτει ο πίνακας 5.2.

n	**λ**	**λ/n**
10	5,3	0,53
20	9,695	0,48
30	13,704	0,46
40	17,347	0,43
50	20,650	0,41
60	23,645	0,39
100	33,143	0,33
200	47,195	0,24
300	55,504	0,19
500	65,974	0,13

Πίνακας 5.2 *Μέση λήξη όρων ράντας με επιτόκιο 5%.*

Παράδειγμα 12

Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει ένα πρόγραμμα στο οποίο αγοραστής καταθέτει κάθε εξάμηνο (στην αρχή του) το ποσό των €300 για 30 έτη. Το επιτόκιο θεωρείται εξαμηνιαίο ίσο με 3%.

Στο τέλος των 30 ετών έχει δύο επιλογές:

Α) να εισπράξει το συσσωρευμένο ποσό

Β) να εισπράττει κάθε τρίμηνο σύνταξη (στο τέλος κάθε μήνα) για 20 έτη (το επιτόκιο να θεωρηθεί τριμηνιαίο ίσο με 1%)

Στην επιλογή (Α) να βρείτε το συσσωρευμένο ποσό.

Στην επιλογή (Β) να βρείτε τη μηνιαία σύνταξη.

Λύση

Αρχικά έχουμε μια προκαταβλητέα ράντα $n=60$ όρων με όρο $R=300$, θα βρούμε την τελική αξία της

$$V = R\cdot(1+i)\cdot s_{\overline{n}|\,i} = 500\cdot 1,03\cdot s_{\overline{60}|\,0,03} = 500\cdot 1,03\cdot 163,0534 = 83.973$$

Το συσσωρευμένο ποσό στο τέλος των 30 ετών είναι €83.973.

Για το ερώτημα (Β) έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα $m=80$ όρων.

Η αρχική της αξία είναι ίση με την τελική αξία της προηγούμενης ράντας V.

$$\bar{R}\cdot a_{\overline{n}|\,i} = V \Rightarrow \bar{R}\cdot\frac{1-(1+i)^{-m}}{i} = V$$

Μετά την αντικατάσταση

$$\bar{R}\cdot\frac{1-1,01^{-80}}{0,01}=83.973$$

Η αρχική αξία για ράντα με 80 όρους δεν συμπεριλαμβάνεται στους πίνακες αλλά την υπολογίζουμε από τον τύπο

$$a_{\overline{80}|\,0,01}\cdot\frac{1-1,01^{-80}}{0,01}=54,88812$$

συνεπώς

$$\bar{R}\cdot 54,8882=83.973 \Rightarrow \bar{R}=1.530\,.$$

Το ποσό της τριμηνιαίας σύνταξης είναι €1.530.

5.6. Διηνεκής ράντα

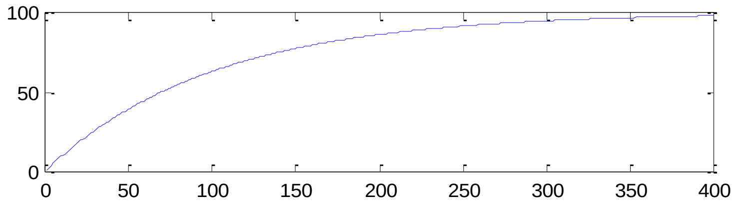
Στο προηγούμενο παράδειγμα αν ήθελε να εισπράττει τη σύνταξη για 30 έτη

$$a_{\overline{120}|\,0,01}\cdot\frac{1-1,01^{-120}}{0,01}=69,7005$$

συνεπώς το τριμηνιαίο ποσό είναι:

$$\frac{83.973}{69,7005}=1.205\,.$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι πολύ μικρότερο από αυτό που αντιστοιχεί στα 20 έτη.



Σχήμα 5.8 *Γραφική παράσταση της συνάρτησης* $a_{\overline{n}|\,0,01}$ *για* $n\in[0,400]$

Αν πάλι ήθελε να εισπράττει τη σύνταξη για 40 έτη θα είχαμε

$$a_{\overline{160}|\,0,01}=\frac{1-1,01^{-160}}{0,01}=79,6493$$

συνεπώς το τριμηνιαίο ποσό είναι:

$$\frac{83.973}{79,6493}=1.054\,.$$

Ήδη από τα στοιχεία του πίνακα έχουμε

$$a_{\overline{10}|\,0,01}=9,4713$$
$$a_{\overline{20}|\,0,01}=18,0456$$
$$a_{\overline{30}|\,0,01}=25,8077$$
$$a_{\overline{40}|\,0,01}=32,8347$$
$$a_{\overline{50}|\,0,01}=39,1961$$
$$a_{\overline{60}|\,0,01}=44,9550$$

Καθώς αυξάνονται οι όροι η αρχική αξία αυξάνεται αλλά με όλο και πιο αργό ρυθμό. Αν δούμε τη γραφική παράσταση, σχήμα 5.8, της $a_{\overline{n}|\,0,01}$ θεωρώντας $n\in[0,400]$ παρατηρούμε ασυμπτωτική συμπεριφορά. Δηλαδή καθώς το πλήθος των όρων τείνει στο άπειρο η αρχική τιμή της ράντας τείνει στο 100.

Παράδειγμα 13

Αν θεωρήσουμε σταθερό επιτόκιο και την αρχική αξία

$$a_{\overline{n}|\, i} = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{\left(1+i\right)^n}\right)$$

σαν συνάρτηση μόνο του πλήθους των όρων έχουμε

$$f(t) = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{\left(1+i\right)^t}\right)$$

Παίρνουμε την παράγωγο

$$f'(t) = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{\left(1+i\right)^t}\right)' = \frac{1}{i}\left(1-\left(1+i\right)^{-t}\right)' == -\frac{1}{i}\left(\left(1+i\right)^{-t}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{i}\left(e^{-t\ln(1+i)}\right)' = -\frac{1}{i}e^{-t\ln(1+i)}\left(-\ln(1+i)\right) =$$

$$= \frac{1}{i}e^{-t\ln(1+i)}\ln(1+i) = \frac{\ln(1+i)}{i}e^{-t\ln(1+i)}$$

Βλέπουμε ότι η παράγωγος είναι θετικός αριθμός ανεξάρτητα από το πλήθος των όρων. Κατά συνέπεια η αρχική αξία είναι αύξουσα ως προς το πλήθος των όρων όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο.

Παραγωγίζουμε ακόμα μια φορά

$$f''(t) = \left(\frac{\ln(1+i)}{i}e^{-t\ln(1+i)}\right)' = \frac{\ln(1+i)}{i}\left(e^{-t\ln(1+i)}\right)' =$$

$$= \frac{\ln(1+i)}{i}e^{-t\ln(1+i)}\left(-\ln\left(1+i\right)\right) =$$

$$= -\frac{\left(\ln(1+i)\right)^2}{i}e^{-t\ln(1+i)}$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητικός αριθμός συνεπώς η πρώτη παράγωγος είναι φθίνουσα. Δηλαδή ο ρυθμός αύξησης της αρχικής αξία φθίνει καθώς το πλήθος των όρων αυξάνεται. Αυτή ακριβώς η συμπεριφορά φαίνεται στο σχήμα 5.8.

Παράδειγμα 14

Κάποιος έκανε μια δωρεά σε ένα σύλλογο υποτροφιών το ποσό των €100.000 με σκοπό να δίνεται υποτροφία σε έναν φοιτητή της ιδιαίτερης πατρίδας του. Ο φοιτητής θα εισπράττει ένα ποσό κάθε τρίμηνο. Το επιτόκιο θεωρείται τριμηνιαίο 1%.

Αναρωτήθηκε ποιο θα ήταν το τριμηνιαίο ποσό αν η υποτροφία δινόταν για 30 έτη

Λύση

Για 30 έτη έχουμε 120 τρίμηνα και

$$a_{\overline{120}|\, 0,01} = 69,7004$$

συνεπώς το ποσό είσπραξης είναι $\frac{100.000}{69,7005} = 1.435$ ευρώ.

Για 60 έτη έχουμε 240 μήνες και

$$a_{\overline{240}|\, 0,01} = 90,8194$$

συνεπώς το ποσό είσπραξης είναι $\frac{100.000}{90,8194} = 1.101$ ευρώ.

Για 90 έτη έχουμε 369 μήνες και

$$a_{\overline{360}|\, 0,01} = 97,2183$$

συνεπώς το ποσό είσπραξης είναι $\frac{100.000}{97,2183}=1.029$ ευρώ.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά από τα 60 στα 90 έτη είναι μικρή (€28). Υποθέτουμε ότι και σε ενδεχόμενη επιπλέον αύξηση των ετών η τιμή θα αλλάζει λίγο. Πράγματι αν υπολογίσουμε το αποτέλεσμα ως τα 300 έτη, έχουμε:

$$a_{\overline{1200}|\,0,01}=99,999\simeq 100$$

Συνεπώς η τριμηνιαία δόση της υποτροφίας είναι €1.000 και τόση θα παραμείνει όσο και αν αυξήσουμε τα έτη χορήγησης. Αυτό είναι αναμενόμενο από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $a_{\overline{n}|\,\mathrm{i}}$.

Εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά για άπειρους όρους και έχουμε:

$$a_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}}=\lim_{n\to\infty}a_{\overline{n}|\,\mathrm{i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}=\frac{1}{i},$$

γιατί

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+i\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+i\right)^{n}}=0.$$

Μια τέτοια ράντα με άπειρους όρους ονομάζεται διηνεκής ράντα.

Παράδειγμα 15

Ποιο είναι το ποσό που θα κατατεθεί στην αρχή του έτους για να χορηγείται για άπειρο χρόνο υποτροφία €12.000 στο τέλος κάθε έτους; Επιτόκιο ετήσιο 4%.

Λύση

Έχουμε για την αρχική αξία διηνεκούς ράντας

$$a_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}}=\frac{1}{i}\Rightarrow a_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}}=\frac{1}{0,04}=25$$

Συνεπώς η ζητούμενη αρχική αξία θα είναι

$$A_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}}=R\cdot a_{\overline{\infty}|\,\mathrm{i}}=12.000\cdot a_{\overline{\infty}|\,0,04}=12.000\cdot 25=300.000$$

Το αρχικό κεφάλαιο πρέπει να είναι €300.000.

5.7. Κλασματική ράντα

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα θεωρήσαμε ότι η περίοδος της ράντας είναι ίση με την περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο ανατοκισμού. Οι ράντες αυτές ονομάζονται **ακέραιες ράντες**. Ενώ στην περίπτωση που το επιτόκιο ανατοκισμού αναφέρεται σε περίοδο μεγαλύτερη από αυτή της ράντας η ράντα ονομάζεται **κλασματική ράντα**. Για παράδειγμα μπορεί η περίοδος της ράντας να είναι ο μήνας και το επιτόκιο ανατοκισμού εξαμηνιαίο ή ετήσιο.

Δεν θα αναφερθούμε πολύ σε κλασματικές ράντες αφού μπορούμε να ανάγουμε το επιτόκιο ανατοκισμού σε ισοδύναμο με το επιτόκιο αν η περίοδος ανατοκισμού είναι η περίοδος της ράντας.

Παράδειγμα 16

Να βρεθεί η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας περιόδου ενός μήνα 24 όρων με όρο €200 αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος και το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 6%.

Λύση

Το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι $i=0,06$, θα βρούμε το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο έστω j, ισχύει

$$1+i=\left(1+j\right)^{6}\Rightarrow j=\sqrt[6]{1+i}-1\Rightarrow$$

$$j=\sqrt[6]{1,06}-1=0,00976$$

Συνεπώς η τελική αξία της ράντας $n=24$ όρων με όρο $R=200$ είναι:

$$V_{final}=R\cdot s_{\overline{n}|\,\mathrm{j}}=200\cdot s_{\overline{24}|\,0,00976}=$$
$$=200\cdot 26,897=5.379$$

Παράδειγμα 17

Αγοράζει κάποιος σήμερα από ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών είδη αξίας €2.000 και συμφωνεί να τα πληρώσει σε 2 έτη με μηνιαίες δόσεις. Η πρώτη δόση θα πληρωθεί σε ένα μήνα από σήμερα. Το επιτόκιο είναι εξαμηνιαίο 7%. Να βρεθεί το ποσό της δόσης.

Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα που η αρχική της αξία είναι €2.000. Το πραγματικό μηνιαίο επιτόκιο j που αντιστοιχεί στο εξαμηνιαίο $i = 0,07$ είναι:

$$1 + i = (1 + j)^6 \Rightarrow j = \sqrt[6]{1 + i} - 1 \Rightarrow$$

$$j = \sqrt[6]{1,07} - 1 = 0,01134$$

Αφού η αρχική αξία είναι €2.000 έχουμε:

$$2.000 = R \cdot a_{\overline{24|}\ 0,01134} \Rightarrow$$

$$2.000 = R \cdot 20,9083 \Rightarrow$$

$$R = 95,66$$

Η δόση είναι €95,66.

Παράδειγμα 18

Αγοράζει κάποιος σήμερα από ένα κατάστημα έπιπλα αξίας €5.000 και του προτείνουν να πληρώσει σε 36 μηνιαίες δόσεις €181 η κάθε μια. Η πρώτη δόση θα πληρωθεί σε ένα μήνα από σήμερα. Να βρεθεί το εξαμηνιαίο επιτόκιο με το οποίο έγινε ο υπολογισμός.

Λύση

Έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα που η αρχική της αξία είναι €5.000, $n = 36$ όρους με κάθε όρο $R = 181$ ευρώ.

$$5.000 = 181 \cdot a_{\overline{36|}\ j} \Rightarrow a_{\overline{36|}\ j} = 27,6243$$

Από τους πίνακες έχουμε:

$$a_{\overline{36|}\ 0,01} = 30,107505$$

$$a_{\overline{36|}\ 0,02} = 25,488842$$

Η τιμή που ζητάμε βρίσκεται ενδιάμεσα και είναι $a_{\overline{36|}\ 0,015} = 27,66$.

Θεωρούμε λοιπόν ότι $j = 0,015$ οπότε το πραγματικό εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι

$$1 + i = (1 + j)^6 \Rightarrow$$

$$i = (1 + 0,015)^6 - 1 = 0,0934$$

Το εξαμηνιαίο επιτόκιο με το οποίο έγινε ο υπολογισμός είναι 9,34%.

Για περισσότερα παραδείγματα δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

5.8. Ασκήσεις

5.8.1. Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα για 20 έτη το ποσό των €1.000 στο τέλος κάθε εξαμήνου. Το επιτόκιο θεωρείται εξαμηνιαίο ίσο με 3% και ο ανατοκισμός επίσης εξαμηνιαίος. Το ποσό που σχηματίζεται στο τέλος των 20 ετών το αφήνει στην τράπεζα για ακόμα 5 έτη με ετήσιο ανατοκισμό και επιτόκιο 5%. Να βρεθεί το τελικό ποσό που σχηματίστηκε.

Λύση.

Πρόκειται αρχικά για ληξιπρόθεσμη ράντα 40 όρων με όρο €1.000 και ζητάμε την τελική της αξία. Τα δεδομένα μας είναι:

$n_1 = 2 \cdot 20 = 40$

$R = 1.000$

$i_1 = 0,03$

Η τελική αξία μοναδιαίας ληξιπρόθεσμης ράντας 40 όρων με επιτόκιο 3% είναι:

$$s_{\overline{n_1|}\, i_1} = s_{\overline{40|}\, 0,03} = 75,40126$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον όρο για να βρούμε την τελική αξία της συγκεκριμένης ράντας και έχουμε:

$$Rs_{\overline{n_1|}\, i_1} = 1.000 s_{\overline{40|}\, 0,03} = 75.401,26$$

Το ποσό αυτό θα παραμείνει στην τράπεζα για 5 έτη και θα τοκίζεται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5%. Τα νέα δεδομένα είναι:

$$K_0 = 75.401,26$$

$$i_2 = 0,05$$

$$n_2 = 5$$

Συνεπώς το κεφάλαιο μετά από 5 έτη θα είναι:

$$\begin{aligned} K_5 &= K_0(1+i_2)^{n_2} = 75.401,26 \cdot (1+0.05)^5 = \\ &= 75.401,26 \cdot 1,27628 = \\ &= 96.233,12 \end{aligned}$$

Το τελικό κεφάλαιο που θα έχει δημιουργηθεί μετά από 25 έτη είναι € 96.233.

Άσκηση 2

Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα το ποσό των €600 στο τέλος κάθε εξαμήνου από τη γέννηση του παιδιού του έως και τη συμπλήρωση του 18ου έτους της ηλικίας του. Στη συνέχεια το παιδί θα εισπράττει ένα σταθερό ποσό στην αρχή κάθε εξαμήνου για 4 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράττει το παιδί. Ο ανατοκισμός θεωρείται εξαμηνιαίος και το εξαμηνιαίο επιτόκιο είναι 2%.

Λύση

Αρχικά έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα 36 όρων με όρο €600. Στη συνέχεια έχουμε προκαταβλητέα ράντα 8 όρων. Το ζητούμενο είναι ο όρος της δεύτερης ράντας. Η τελική αξία της πρώτης ράντας είναι ίση με την αρχική αξία της δεύτερης ράντας.

Τα δεδομένα της άσκησης είναι:

$$R_1 = 600$$

$$n_1 = 36$$

$$n_2 = 8$$

Στα μεγέθη χρησιμοποιούμε δείκτη 1 για την πρώτης ράντα και δείκτη 2 για τη δεύτερη ράντα. Το επιτόκιο είναι το ίδιο

$$i_1 = i_2 = 0,02$$

Έχουμε ότι:

$$R_1 s_{\overline{n_1|}\, i_1} = R_2(1+i_2)a_{\overline{n_2|}\, i_2}$$

$$600 s_{\overline{36|}\, 0,02} = R_2(1+0,02)a_{\overline{8|}\, 0,02}$$

$$R_2 = \frac{600 s_{\overline{36|}\, 0,02}}{1,02 a_{\overline{8|}\, 0,02}}$$

Από τους πίνακες παίρνουμε

$$s_{\overline{36|}\, 0,02} = 51,99437$$

$$a_{\overline{8|}\, 0,02} = 7,32548$$

Συνεπώς

$$R_2 = \frac{600 s_{\overline{36|}\, 0,02}}{1,02 a_{\overline{8|}\, 0,02}} = \frac{600 \cdot 51,99436}{1,02 \cdot 7,32548} = \frac{31.196,62}{7,47199} = 4.175,14$$

Το παιδί θα λαμβάνει €4.175,14 στην αρχή κάθε εξαμήνου.

Άσκηση 3

Παππούς θέλει να κάνει ένα δώρο στο νεογέννητο εγγόνι του. Ρωτά τους γονείς αν θέλουν να τους καταθέσει άμεσα €10.000 στην τράπεζα ή να τους δίνει €400 στην αρχή κάθε εξαμήνου για 20 έτη. Ποιο ποσό θα πρέπει να καταθέσει στην τράπεζα στη δεύτερη περίπτωση; Εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%.

Λύση

Ζητάμε την αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας 40 όρων και όρου €400.

Η αρχική αξία της μοναδιαίας προκαταβλητέας ράντας 40 όρων είναι:

$$(1+i)a_{\overline{n|}\,i} = (1+0,03)a_{\overline{40|}\,0,03} = 1,03 \cdot 23,11477 = 23,80821$$

Η αρχική αξία της συγκεκριμένης ράντας είναι:

$$R(1+i)a_{\overline{n|}\,i} = 400(1+0,03)a_{\overline{40|}\,0,03} = 400 \cdot 23,80821 = 9.523,29$$

Ο παππούς θα πρέπει να καταθέσει €9.523,29.

Άσκηση 4

Φοιτητής που αδυνατεί να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του ζητά από εύπορο συγγενή του να του χορηγεί το ποσό των €1.500 στην αρχή κάθε τριμήνου για 5 έτη. Το δάνειο θα το αποπληρώσει πληρώνοντας ένα σταθερό ποσό δύο φορές το χρόνο. Επιτόκιο τριμηνιαίο 2%. Συμφωνείται να πληρώσει την πρώτη δόση ένα έτος και έξι μήνες μετά τη λήξη των 5 ετών και στη συνέχεια στο τέλος κάθε εξαμήνου με 20 δόσεις. (α) Ποιο είναι το ποσό που θα καταβάλει ο φοιτητής; (β) Πόσα έτη θα χρειαζόταν για να αποπληρώσει το δάνειο αν πλήρωνε €2.000 κάθε φορά; Επιτόκιο εξαμηνιαίο 4%.

Λύση

Στην αρχή έχουμε προκαταβλητέα ράντα 20 όρων με όρο €1.500. Η τελική της αξία αυτής της ράντας είναι:

$$R\left(1+i\right)s_{\overline{n|}\,i} = 1.500\left(1+0,02\right)s_{\overline{20|}\,0,02} = 1.500 \cdot 1,02 \cdot 24,29737 = 37.175$$

Στο τέλος των 5 ετών το ποσό που έχει μαζευτεί είναι €37.175. Σε αυτό θα προσθέσουμε τους τόκους που δημιουργούνται στο ένα έτος και θα έχουμε το ποσό

$$37.175 \cdot 1,04^2 = 40.208,48$$

Αυτό το ποσό θα το αποπληρώσει με ληξιπρόθεσμη ράντα 20 όρων. Δηλαδή γνωρίζουμε την αρχική αξία της ράντας είναι 40.208,48 και ζητάμε τον όρο.

$$Ra_{\overline{n|}\,i} = A_{\overline{n|}\,i} \Rightarrow R = \frac{A_{\overline{n|}\,i}}{a_{\overline{n|}\,i}}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$R = \frac{A_{\overline{20|}\,0,04}}{a_{\overline{20|}\,0,04}} = \frac{40.208,48}{a_{\overline{20|}\,0,04}} = \frac{40.208,48}{13,59033} = 2.958,61$$

Το ποσό αυτό ίσως είναι πολύ μεγάλο. Το ερώτημα (β) μας ρωτάει πόσα έτη θα χρειαστεί για να αποπληρώσει το συγγενή του ο φοιτητής αν πληρώνει €2.000. Εδώ και πάλι είναι γνωστή η αρχική αξία της ράντας και ο όρος και ζητάμε το πλήθος των όρων. Μπορούμε να βρούμε την αρχική αξία της αντίστοιχης μοναδιαίας ράντας. Έχουμε για την αρχική αξία

$$A_{\overline{n|}\,0,04} = 40.208,48$$

Συνεπώς η αρχική αξία της μοναδιαίας ράντας είναι

$$a_{\overline{n|}\,0,04} = \frac{A_{\overline{n|}\,0,04}}{R} = \frac{40.208,48}{2.000} = 20,10424$$

Από τους πίνακες θα βρούμε σε ποιο πλήθος όρων αντιστοιχεί αυτή η αρχική αξία. Βλέπουμε ότι

$$a_{\overline{41|}\,0,04} = 19,99305$$

$$a_{\overline{42|}\,0,04} = 20,18563$$

Συνεπώς απαιτούνται περίπου 42 όροι, δηλαδή 21 έτη.

5.8.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα στο τέλος κάθε εξαμήνου €5.000 με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει στο τέλος του 15ου έτους.
2. Έμπορος αγόρασε από έναν προμηθευτή προϊόντα τα οποία θα πληρώσει για 5 έτη κάθε εξάμηνο με πρώτη δόση ένα εξάμηνο από σήμερα και ποσό δόσης €500. Ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος και το επιτόκιο 5%. Ποια είναι αξία των προϊόντων την ημέρα της αγοράς;
3. Για να εξοφληθεί δάνειο €30.000 πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους €2.000. Οι πληρωμές ξεκινούν ένα έτος μετά τη σύναψη του δανείου. Το επιτόκιο είναι ετήσιο και ίσο με 9% και ο ανατοκισμός ετήσιος. Να βρεθεί σε πόσα έτη θα αποπληρωθεί το δάνειο.
4. Στην αρχή κάθε εξαμήνου καταθέτει κάποιος στην τράπεζα €200 για 11 έτη. Στο τέλος των 11 ετών θα εισπράξει το ποσό των €1.050. Αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος να βρεθεί το εξαμηνιαίο επιτόκιο.
5. Μια ασφαλιστική εταιρεία έχει ένα πρόγραμμα στο οποίο ο επενδυτής καταθέτει στην αρχή κάθε εξαμήνου το ποσό των €300 για 20 έτη. Το επιτόκιο θεωρείται εξαμηνιαίο ίσο με 3%. Μετά το τέλος των 20 ετών τα χρήματα παραμένουν στην ασφαλιστική για επιπλέον δέκα έτη και τοκίζονται με εξαμηνιαίο ανατοκισμό και εξαμηνιαίο επιτόκιο 4%. Να βρεθεί το συσσωρευμένο ποσό. Αν το ποσό παραμείνει στην τράπεζα έτσι ώστε να αποδίδει μηνιαία σύνταξη (στο τέλος κάθε μήνα) για 30 έτη (ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος και το εξαμηνιαίο επιτόκιο ίσο με 2%) να βρεθεί η μηνιαία σύνταξη.
6. Εύπορος νησιώτης επιθυμεί να καταθέσει ένα ποσό σε τράπεζα έτσι ώστε να λαμβάνουν ως έπαινο οι τρεις μαθητές του νησιού με τη μεγαλύτερη βαθμολογία στις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ΑΕΙ το χρηματικό ποσό των €3.000. Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσει έτσι ώστε ο έπαινος να δίνεται για τα επόμενα 50 έτη. Ετήσιο επιτόκιο 5% και ετήσιος ανατοκισμός.
7. Αγόρασε κάποιος αυτοκίνητο και συμφώνησε να το πληρώσει σε 20 τριμηνιαίες δόσεις των €700. Η δόση θα πληρώνεται στο τέλος του τριμήνου και το επιτόκιο θεωρείται τριμηνιαίο και ίσο με 2%. Αφού πλήρωσε 8 δόσεις επιθυμεί να εξοφλήσει άμεσα το υπόλοιπο ποσό. Πόσα χρήματα θα πρέπει να καταβάλει;
8. Επιχείρηση, σαν επιπλέον παροχή προς τους εργαζόμενους της, καταθέτει σε κάποιο επενδυτικό πρόγραμμα για κάθε έναν, το ένα δεύτερο του σημερινού μισθού του σε δύο δόσεις στην αρχή κάθε εξαμήνου αρχίζοντας από την 1η Ιανουαρίου 2015. Ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος με εξαμηνιαίο επιτόκιο 3%. Τα χρήματα μπορεί να τα πάρει ο εργαζόμενος με τη συνταξιοδότησή του ή σε περίπτωση απόλυσης. Υπάλληλος του οποίου ο μισθός είναι σήμερα €1.200 υπολογίζει ότι κατά τη συνταξιοδότησή του στο τέλος του 2035 θα εισπράξει το ποσό των €30.000. Είναι σωστός ο υπολογισμός του;
9. Παππούς που έχει 3 εγγόνια, ηλικίας 8 ετών, 3 ετών και ένα νεογέννητο αποφασίζει να καταθέτει στην τράπεζα στην αρχή κάθε τριμήνου ξεκινώντας από σήμερα 1η Ιανουαρίου 2015 ένα σταθερό ποσό στην αρχή κάθε τριμήνου έτσι ώστε την 1η Ιανουαρίου του έτους που θα είναι 18 ετών να εισπράξουν περίπου το ίδιο ποσό. Ποιο ποσό θα πρέπει να καταθέτει σε κάθε παιδί; Τριμηνιαίος ανατοκισμός, τριμηνιαίο επιτόκιο 2%.
10. Κέρδισε κάποιος στο λαχείο το ποσό των €600.000. Αποφάσισε να καταθέσει στην τράπεζα με προνομιακό εξαμηνιαίο επιτόκιο 4% το μισό ποσό έτσι ώστε να εισπράττει στο τέλος κάθε εξαμήνου ένα σταθερό ποσό για τα επόμενα 50 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράττει κάθε εξάμηνο. Εξαμηνιαίος ανατοκισμός.
11. Παππούς δωρίζει €20.000 στον εγγονό του καταθέτοντας τα χρήματα στην τράπεζα για να εισπράττει €1.000 στην αρχή κάθε έτους για 8 έτη (με αρχή τα 5 έτη από σήμερα) και στο τέλος του 13ου έτους να εισπράξει το ποσό που απέμεινε. Να βρεθεί το ποσό που θα λάβει στο τέλος του 13ου έτους. Ετήσιο επιτόκιο 6%.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 6

6. Δάνεια

6.1. Γενικά

Το σημαντικότερο και σίγουρα το πιο διαδεδομένο κεφάλαιο των οικονομικών μαθηματικών είναι αυτό των δανείων. Κράτη, δημόσιοι οργανισμοί, επιχειρήσεις αλλά και ιδιώτες χρειάζονται χρήματα για τις ανάγκες τους και έτσι καταφεύγουν στη λύση του δανεισμού.

Με τον όρο **Δάνειο** ονομάζουμε κάθε ποσό που δίνεται, συνήθως εντόκως, και πρέπει να επιστραφεί μετά από καθορισμένο χρόνο. Ο χρόνος που μεσολαβεί από την έναρξη μέχρι τη λήξη του δανείου ονομάζεται **διάρκεια του δανείου.**

Ανάλογα με τη διάρκεια αποπληρωμής του δανείου προκύπτουν οι ακόλουθες κατηγορίες:

- Βραχυπρόθεσμα δάνεια είναι αυτά των οποίων η διάρκεια είναι μικρότερη από 1 έτος.
- Μακροπρόθεσμα δάνεια είναι αυτά των οποίων η διάρκεια είναι μεγαλύτερη από 1 έτος.

Στα βραχυπρόθεσμα δάνεια συνήθως χρησιμοποιούμε τον απλό τόκο ενώ στα μακροπρόθεσμα τον ανατοκισμό.

Τα μακροπρόθεσμα δάνεια ανάλογα με τον τρόπο που εξοφλούνται χωρίζονται σε πάγια και σε εξοφλητέα.

Πάγια ονομάζονται τα δάνεια που δεν έχουν συγκεκριμένη διάρκεια εξόφλησης, αλλά ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου. Έτσι το δάνειο μπορεί να εξοφληθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή πληρώνοντας το αρχικό ποσό.

Εξοφλητέα ονομάζονται τα δάνεια που έχουν συγκεκριμένη διάρκεια.

Τα εξοφλητέα δάνεια χωρίζονται και αυτά σε δύο κατηγορίες, τα εφάπαξ και τα τοκοχρεολυτικά.

- Εξοφλητέα εφάπαξ δάνεια ονομάζονται αυτά που εξοφλούνται με μία δόση.
- Εξοφλητέα τοκοχρεωλυτικά δάνεια ονομάζονται αυτά που εξοφλούνται με περισσότερες από μία δόσεις.

Με τον όρο Τοκοχρεολύσιο ονομάζουμε το ποσό που δίνεται από τον οφειλέτη σε κάθε περίοδο και περιλαμβάνει τους τόκους και το χρεολύσιο. Η κάθε δόση χωρίζεται σε δύο μέρη, ένα μέρος αφορά την αποπληρωμή του αρχικού κεφαλαίου (Χρεολύσιο) και το άλλο μέρος αφορά την αποπληρωμή των τόκων.

Η απόσβεση ενός δανείου μπορεί να γίνει με τους ακόλουθους τρόπους:

I. Εξοφλητέα εφάπαξ.
II. Εξοφλητέα με ίσα μέρη κεφαλαίων.
III. Εξοφλητέα με τη μέθοδο σταθερού χρεολυσίου.
IV. Εξοφλητέα με τη μέθοδο προοδευτικού χρεολυσίου.
V. Εξοφλητέα με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες δες: Αλεξανδρή (1989), Αποστολόπουλο (1996), Αποστολόπουλο (2002), Βασιλάκη (2005), Βόσκογλου (1996), Καραπιστόλη (1994), Κιόχο και Κιόχο (1999), Κούγια και Γεωργίου (2004), Οικονομόπουλο (2002), Σφακιανό και Σφακιανό (2010), Τσεβά (2003), Φράγκο (2007), Χουβαρδά (1998), Zima και Brown (1997).

6.2. Δάνεια εξοφλητέα εφάπαξ

6.2.1. Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Αν συμβολίσουμε με K το ποσό του δανείου, τότε, εφόσον οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου αυτοί θα είναι $K \cdot i$ Έτσι αν το δάνειο θα πληρωθεί μετά από n περιόδους η ονομαστική αξία του θα είναι ίση με $K \cdot n \cdot i + K$

Η παρούσα αξία του δανείου αντίστοιχα θα είναι:

$K \cdot i \cdot \frac{1}{1+i}$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$K \cdot i \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^2}$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$K \cdot i \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n}$ για τους τόκους της ν-οστής περιόδου

και

$K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n}$ για την αποπληρωμή του κεφαλαίου.

Άρα η παρούσα αξία του δανείου ισούται με:

$$K \cdot i \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^1} + \ldots + K \cdot i \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{\left(1+i\right)^1} + \ldots + \frac{1}{\left(1+i\right)^n} \right] + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{\left(1+i\right)^1} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1+i\right)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} \right] + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{\left(1+i\right)^n} - 1}{\frac{-i}{1+i}} \right] + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{\left(1+i\right)^n}}{i} \right] + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} =$$

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n|}\, i} + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n}$$

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n|}\, i} + K \cdot U^n$$

$$K \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1+i\right)^n} \right) + K \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^n} = K$$

Αντίστοιχα για την εύρεση της τελικής αξίας του δανείου, ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία θα έχουμε:

$K \cdot i \cdot \left(1+i\right)^0$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$K \cdot i \cdot \left(1+i\right)^1$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$K \cdot i \cdot \left(1+i\right)^{n-1}$ για τους τόκους της ν-οστής περιόδου

και

K για την αποπληρωμή του δανείου.

Άρα η τελική αξία του δανείου ισούται με:

$$K \cdot i \cdot \left(1+i\right)^0 + \ldots + K \cdot i \cdot \left(1+i\right)^{n-1} + K =$$

$$K \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + K =$$

Παράδειγμα 1

Δάνειο €15.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 10 χρόνια με επιτόκιο 8%. Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου, να υπολογισθούν (α) η παρούσα αξία, (β) η τελική αξία του δανείου.

Λύση

α) Η παρούσα αξία των τόκων που έχουμε καταβάλλει ισούται με:

$$K \cdot i \cdot a_{\overline{n}|\, i} = K \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = 15.000 \cdot \left(1 - \frac{1}{1,08^{10}}\right) = 8.052,10$$

Η παρούσα αξία του κεφαλαίου είναι:

$$K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = 15.000 \cdot \frac{1}{1,08^{10}} = 6.947,90$$

β) Η τελική αξία του δανείου θα είναι:

$$K \cdot i \cdot S_{\overline{n}|\, i} + K = 15.000 \cdot 0,08 \cdot S_{\overline{10}|\, 0,08} + 15.000 =$$

$$= 15.000 \cdot 0,08 \cdot 14,48656 + 15.000 = 32.383,88$$

Το ονομαστικό ποσό που θα πρέπει να δώσουμε είναι:

$$K \cdot n \cdot i + K = 15.000 \cdot 10 \cdot 0,08 + 15.000 = 27.000$$

Αναλυτικά η απόσβεση του δανείου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα 6.1:

$$K \cdot i = 15.000 \cdot 0,08 = 1.200$$

Έτος	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Υπόλοιπο**
1	1.200	--	1.200	15.000
2	1.200	--	1.200	15.000
3	1.200	--	1.200	15.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1.200	15.000	12.000	0
ΣΥΝΟΛΟ	12.000	15.000	27.000	

Πίνακας 6.1 *Απόσβεση δανείου.*

6.2.2. Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Εφόσον οι τόκοι δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε περιόδου, τότε το ποσό που πρέπει να καταβληθεί στο τέλος των n περιόδων θα είναι:

$$K_n = K \cdot (1+i)^n$$

Παράδειγμα 2

Δάνειο €15.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 10 χρόνια με επιτόκιο 8%. Να υπολογισθεί το ποσό που πρέπει να δοθεί για την εξόφληση του δανείου αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.

Λύση

Αν δεν πληρώνουμε τους τόκους το ποσό που θα πρέπει να δώσουμε είναι:

$$K = 15.000 \cdot (1+0,08)^{10} = 15.000 \cdot 2,158925 = 32.383,88$$

Προφανώς τα αποτελέσματα στο παράδειγμα 1 και 2 είναι ίδια αφού:

$$K \cdot i \cdot S_{\overline{n}|\, i} + K = K \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + K = K \cdot (1+i)^n$$

6.3. Δάνεια εξοφλητέα με ίσα μέρη κεφαλαίου

Στην περίπτωση αυτή το χρεολύσιο είναι σταθερό σε κάθε περίοδο, ενώ μεταβάλλεται ο τόκος της κάθε περιόδου. Αυτό συνεπάγεται ότι η δόση δεν θα είναι σταθερή. Για να υπολογίσουμε το χρεολύσιο της κάθε περιόδου διαιρούμε το ποσό του δανείου με τον αριθμό των περιόδων.

Αν υποθέσουμε ότι κάποιος δανείστηκε κεφάλαιο K, με επιτόκιο i, για n χρονικές περιόδους, με τη μέθοδο εξόφλησης των ίσων μερών θα καταβάλλει στο τέλος κάθε περιόδου για την εξόφληση του κεφαλαίου ποσό $\frac{K}{n}$ ενώ για την καταβολή του τόκου για κάθε περίοδο θα έχουμε:

$K \cdot i$ για τους τόκους της πρώτης περιόδου

$\left(K - \frac{K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της δεύτερης περιόδου

$\left(K - \frac{2K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της τρίτης περιόδου

$\left(K - \frac{(n-1)K}{n}\right) \cdot i$ για τους τόκους της n περιόδου

Προφανώς το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου της t περιόδου θα είναι:

$$K - t \cdot \frac{K}{n}$$

Παράδειγμα 3

Δάνειο €12.000 πρέπει να εξοφληθεί μετά από 6 χρόνια με επιτόκιο 10%. Αν το δάνειο εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου να βρεθεί η απόσβεση του δανείου ανά έτος.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το χρεολύσιο της κάθε περιόδου έχουμε:

$$\frac{K}{n} = \frac{12.000}{6} = 2.000$$

Για την πρώτη περίοδο ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 12.000 \cdot 0{,}1 = 1.200$$

Όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα 6.2 η απόσβεση του δανείου για την πρώτη περίοδο είναι:

Τόκος	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Πληρωμένο ποσό**	**Υπόλοιπο**
1.200	2.000	3.200	2.000	10.000

Πίνακας 6.2 *Απόσβεση δανείου πρώτης περιόδου.*

Για τη δεύτερη περίοδο ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 10.000 \cdot 0{,}1 = 1.000$$

Η απόσβεση του δανείου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 6.3:

Τόκος	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Πληρωμένο ποσό**	**Υπόλοιπο**
1.000	2.000	3.000	4.000	8.000

Πίνακας 6.3 *Απόσβεση δανείου δεύτερης περιόδου.*

Όμοια βρίσκουμε (πίνακας 6.4):

Έτος	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Υπόλοιπο**
1	1.200	2.000	3.200	10.000
2	1.000	2.000	3.000	8.000
3	800	2.000	2.800	6.000
4	600	2.000	2.600	4.000
5	400	2.000	2.400	2.000
6	200	2.000	2.200	0
ΣΥΝΟΛΟ	4.200	12.000	16.200	

Πίνακας 6.4 *Συνολική απόσβεση δανείου.*

6.4. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου

Εφόσον το χρεολύσιο είναι σταθερό κατά τη διάρκεια του δανείου, όπως επίσης και ο τόκος έχουμε σταθερό τοκοχρεολύσιο.

Ο τόκος υπολογίζεται με βάση το αρχικό ποσό του δανείου με τον τύπο:

$$K \cdot i$$

Το χρεολύσιο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K \cdot P_{\overline{n}|\,i} = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n}|\,i}} = K \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί ο πίνακας απόσβεσης με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου, δανείου €15.000 για 5 χρόνια με επιτόκιο 9%.

Λύση

Ο τόκος θα είναι

$$K \cdot i = 15.000 \cdot 0,09 = 1.350$$

Ενώ το χρεολύσιο

$$K \cdot P_{\overline{5}|\,0,09} = 15.000 \cdot 0,1670925 = 2.506,3875$$

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι:

$$K \cdot i + K \cdot P_{\overline{5}|\,0,09} = 1.350 + 2.506,39 = 3.856,39$$

Το πληρωμένο ποσό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα 6.5:

	Πληρωμένο ποσό
1ο έτος	2.506,39
2ο έτος	2.506,39*1,09+2.506,39=5.238,36
3ο έτος	5.238,36*1,09+2.506,39=8.216,20
4ο έτος	8.216,20*1,09+2.506,39=11.462,05
5ο έτος	11.462,05*1,09+2.506,39=15.000

Πίνακας 6.5 *Πληρωμένο ποσό.*

Συνολικά η απόσβεση του δανείου είναι (πίνακας 6.6):

Έτος	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Πληρωμένο ποσό**	**Υπόλοιπο**
1	1.350	2.506,39	3.856,39	2.506,39	12.493,61
2	1.350	2.506,39	3.856,39	5.238,36	9.761,64
3	1.350	2.506,39	3.856,39	8.216,20	6.783,80
4	1.350	2.506,39	3.856,39	11.462,05	3.537,95
5	1.350	2.506,39	3.856,39	15.000	0

Πίνακας 6.6 *Απόσβεση δανείου.*

6.5. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου (γαλλική μέθοδος)

Η μέθοδος αυτή είναι η πιο ευρέως γνωστή και χρησιμοποιούμενη. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στη Γαλλία γιαυτό και πήρε το όνομα αυτό. Στη μέθοδο αυτή το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό ενώ ο τόκος υπολογίζεται από το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό, άρα συνεχώς μειώνεται. Συνεπώς, αφού το τοκοχρεολύσιο είναι σταθερό, το χρεολύσιο θα αυξάνεται συνεχώς. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο το τοκοχρεολύσιο είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n}|\,i}$$

Έτσι λοιπόν στο τέλος της πρώτης περιόδου θα έχουμε δώσει για την εξόφληση του δανείου ποσό:

$$P_1 = K \cdot P_{\overline{n|}\,i}$$

Συνεπώς το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό θα είναι:

$$K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}$$

Ο τόκος της δεύτερης περιόδου θα υπολογιστεί με βάση το ανεξόφλητο ποσό του δανείου στο τέλος της πρώτης περιόδου συνεπώς θα είναι:

$$\left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) \cdot i$$

Αντίστοιχα το χρεολύσιο θα είναι "τοκοχρεολύσιο – τόκος" άρα:

$$\left(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) - \left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) \cdot i = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i} - K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot i =$$
$$= K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i) = P_2$$

Το ανεξόφλητο ποσό στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι:

$$K - (P_1 + P_2)$$

Ο τόκος της τρίτης περιόδου θα είναι:

$$\left[K - (P_1 + P_2)\right] \cdot i$$

και το χρεολύσιο:

$$\left(K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i}\right) - \left(K - K \cdot (P_1 + P_2)\right) \cdot i = K \cdot i + P_1 - K \cdot i + P_1 \cdot i + P_2 \cdot i =$$
$$= P_1 \cdot (1+i) + P_2 \cdot i = P_2 + P_2 \cdot i =$$
$$= P_2 \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = P_1 \cdot (1+i)^2 = P_3$$

Το ανεξόφλητο ποσό στο τέλος της 2ης περιόδου θα είναι:

$$K - (P_1 + P_2 + P_3)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα απόσβεσης του δανείου για m περιόδους.

Οι τύποι που μας δίνουν τα στοιχεία του δανείου για τη n-οστή περίοδο είναι:

Χρεολύσιο:

$$P_m = P_1 \cdot (1+i)^{n-1} = K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot (1+i)^{m-1}$$

Εξοφλημένο ποσό δανείου:

$$E_m = P_1 + P_2 + \cdots + P_m = P_1 + P_1 \cdot (1+i) + P_1 \cdot (1+i)^2 + \cdots + P_1 \cdot (1+i)^{m-1} =$$
$$= P_1 \cdot S_{\overline{m|}\,i} = K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i}$$

Υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό:

$$Y_m = K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i} = K \cdot \left(1 - P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m|}\,i}\right)$$

Τόκος

$$I_m = Y_{m-1} \cdot i = \left(K - K \cdot P_{\overline{n|}\,i} \cdot S_{\overline{m-1|}\,i}\right) \cdot i$$

Παράδειγμα 5

Δάνειο €80.000..πρέπει να εξοφληθεί σε 6 χρόνια με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου και επιτόκιο 7%. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{6|}\,0.07} = 0.1397958$$

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i} = 80.000 \cdot (0,07 + 0,1397958) = 16.783,664$$

1ο έτος

Ο τόκος για το 1ο έτος θα είναι:

$$I = K \cdot i = 80.000 \cdot 0,07 = 5.600$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

$$P = R - I = 16.783,66 - 5.600 = 11.183,66$$

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

$$Y = K - P = 80.000 - 11.183,66 = 68.816,34$$

2ο έτος

Ο τόκος για το 2ο έτος θα είναι:

$$I = 68.816,34 \cdot 0,07 = 4.817,14$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

$$16.783,66 - 4.817,14 = 11.966,52$$

Το πληρωμένο ποσό του δανείου θα είναι:

$$11.183,66 + 11.966,52 = 23.150,18$$

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

$$68.816,34 - 11.966,52 = 56.849,82$$

3ο έτος

Ο τόκος για το 3ο έτος θα είναι:

$$I = 56.849,82 \cdot 0,07 = 3.979,49$$

Το χρεολύσιο θα είναι:

$$16.783,66 - 3.979,49 = 12.804,17$$

Το πληρωμένο ποσό του δανείου θα είναι:

$$23.150,18 + 12.804,17 = 35.954,35$$

Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου είναι:

$$56.849,82 - 12.804,17 = 44.045,65$$

Όμοια βρίσκουμε τα ποσά για τα υπόλοιπα έτη (πίνακας 6.7).

Έτος	**Τοκοχρεολύσιο**	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Πληρωμένο**	**Ανεξόφλητο**
1	16.783,66	5.600	11.183,66	11.183,66	68.816,34
2	16.783,66	4.817,14	11.966,52	23.150,18	56.849,82
3	16.783,66	3.979,48	12.804,18	35.954,36	44.045,64
4	16.783,66	3.083,19	13.700,47	49.654,83	30.345,17
5	16.783,66	2.124,16	14.659,50	64.314,33	15.685,67
6	16.783,66	1.097,99	15.685,67	80.000	0

Πίνακας 6.7 *Απόσβεσης δανείου.*

6.6. Δάνεια εξοφλητέα με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων

Στην περίπτωση αυτή ο οφειλέτης καταθέτει ένα ποσό με επιτόκιο διαφορετικό από αυτό του δανείου με σκοπό να δημιουργήσει ένα κεφάλαιο ίσο με αυτό που χρωστάει. Το επιτόκιο με το οποίο γίνεται η κατάθεση συνήθως είναι μικρότερο από το επιτόκιο δανεισμού και ονομάζεται επιτόκιο ανασύστασης.

6.6.1. Απόσβεση δανείου όταν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου

Εφόσον ο οφειλέτης πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε περιόδου, θα πρέπει να συγκεντρώσει το ποσό του δανείου από τις καταθέσεις που θα κάνει σε κάθε περίοδο. Έχουμε λοιπόν μια ληξιπρόθεσμη ράντα που η τελική αξία της πρέπει να είναι ίση με το ποσό του δανείου (K). Δηλαδή αν ονομάσουμε R_1 το ποσό της δόσης και t το επιτόκιο ανασύστασης θα πρέπει να ισχύει: $K = R_1 \cdot S_{\overline{n|}t}$. Για να βρούμε λοιπόν το ποσό της δόσης που πρέπει να καταθέτουμε στο τέλος κάθε περιόδου έχουμε:

$$R_1 = K \cdot \frac{1}{S_{\overline{n|}t}} = K \cdot P_{\overline{n|}t}$$

Συνεπώς το συνολικό ποσό της δόσης που πρέπει να πληρώνουμε θα είναι:

$$R = I + R_1 = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}t}$$

Σημειώνεται ότι στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιούνται και τα δύο επιτόκια δανεισμού και ανασύστασης ($i,\ t$).

6.6.2. Απόσβεση δανείου όταν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (Αμερικάνικο Σύστημα)

Όταν δεν καταβάλλονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου θα πρέπει προφανώς μόνο με τις δόσεις να καλύψουμε την τελική αξία του δανείου. Δηλαδή: $K\cdot(1+i)^n = R_1\cdot S_{\overline{n|}\,t}$. Άρα η δόση θα πρέπει να είναι:

$$R_1 = K\cdot(1+i)^n\cdot\frac{1}{S_{\overline{n|}\,t}} = K\cdot(1+i)^n\cdot P_{\overline{n|}\,t}$$

Παράδειγμα 6

Δάνειο €50.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 10 χρόνια με επιτόκιο 6% με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% να βρεθεί η δόση του δανείου (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{10|}\,0,05} = 0,0795046$$

$$1,06^{10} = 1,7908477$$

(α) Όσον αφορά το εξοφλητικό απόθεμα έχουμε:

$$R_1 = K\cdot P_{\overline{10|}\,0,05} = 50.000\cdot 0,0795046 = 3.975,23$$

Το ποσό των τόκων για κάθε περίοδο θα είναι:

$$R_2 = K\cdot i = 50.000\cdot 0,06 = 3.000$$

Συνεπώς το συνολικό ποσό της κάθε δόσης θα είναι:

$$R = R_1 + R_2 = 3.975,23 + 3.000 = 6.975,23$$

(β) Για την περίπτωση που δεν καταβάλλονται οι τόκοι έχουμε:

$$R_1 = K\cdot(1+i)^n\cdot P_{\overline{n|}\,t} = 50.000(1+0,06)^{10}\cdot P_{\overline{10|}\,0.05}$$

$$R_1 = 50.000\cdot 1,7908477\cdot 0,0795046 = 7.119,03$$

6.7. Ασκήσεις

6.7.1. Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Δανείζεται κάποιος €150.000 για 25 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 5%. Για την απόσβεση του θα δοθούν ίσες ετήσιες δόσεις με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Να βρεθούν (α) Η δόση του δανείου, (β) Το χρεολύσιο της 2ης περιόδου, (γ) Το χρεολύσιο της 22ης περιόδου, (δ) Το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της 18ης περιόδου, (ε) Το συνολικό ποσό των τόκων, (στ) Το μέρος των τόκων της δόσης της 3ης περιόδου, (ζ) Το μέρος των τόκων της δόσης της 23ης περιόδου.

Λύση

(α) Για να βρούμε την δόση του δανείου χρησιμοποιούμε τη σχέση: $R = K\cdot i + K\cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$ και έχουμε

$$R = K\cdot i + K\cdot P_{\overline{25|}\,0,05} = 150.000\cdot 0,05 + 150.000\cdot 0,020952 = 10.642,8$$

(β) Για τον υπολογισμό του χρεολυσίου χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$P_m = P_1\cdot(1+i)^{m-1} = K\cdot P_{\overline{n|}\,i}\cdot(1+i)^{m-1}$$

και κάνοντας αντικατάσταση έχουμε

$$P_2 = K\cdot P_{\overline{25|}\,0,05}\cdot(1+0,05)^{2-1} = 150.000\cdot 0,020952\cdot 1,05 = 3.299,94$$

(γ) Όμοια έχουμε:

$$P_{22} = K\cdot P_{\overline{25|}\,0,05}\cdot(1+0,05)^{22-1} = 150.000\cdot 0,020952\cdot 2,786 = 8.755,84$$

(δ) Για το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό του δανείου της $18^{ης}$ περιόδου έχουμε:

$$Y_{18} = K \cdot \left(1 - P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{18|}\,0,05}\right) = 150.000 \cdot (1 - 0,020952 \cdot 28,132385) = 61.585,54$$

(ε) Οι συνολικοί τόκοι με τους οποίους επιβαρύνθηκε το δάνειο θα βρεθούν από το συνολικό ποσό που θα δώσουμε για την εξόφληση του δανείου μείον το αρχικό ποσό που πήραμε δηλαδή:

$$I = R \cdot n - K = 10.642,8 \cdot 25 - 150.000 = 116.070\,.$$

(στ) Για το μέρος των τόκων της $3^{ης}$ περιόδου έχουμε:

$$I_3 = \left(K - K \cdot P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{3-1|}\,0,05}\right) \cdot 0,05 = 150.000(1 - 0,020952 \cdot 2,05) \cdot 0,05 = 7.177,86$$

(ζ) Για το μέρος των τόκων της δόσης της $23^{ης}$ περιόδου έχουμε:

$$I_{23} = \left(K - K \cdot P_{\overline{25|}\,0,05} \cdot S_{\overline{23-1|}\,0,05}\right) \cdot 0,05 = 150.000(1 - 0,020952 \cdot 38,5052) \cdot 0,05 = 1.449,29$$

Άσκηση 2

Αν μπορούμε να πληρώνουμε ετήσια δόση δανείου €6.000 για 25 χρόνια τι ποσό μπορούμε να δανειστούμε με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 4%; Τι ποσό θα πληρώσουμε συνολικά σε τόκους;

Λύση

(α) Γνωρίζουμε ότι, η σχέση που μας δίνει τη δόση του δανείου είναι:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{25|}\,0,04} \Rightarrow 6.000 = K \cdot \left(0,04 + P_{\overline{25|}\,0,04}\right) \Rightarrow 6.000 = 0,064 \cdot K \Rightarrow K = 93.750$$

Συνεπώς το ποσό που μπορούμε να δανειστούμε συνολικά είναι €93.750

(β) Το συνολικό ποσό των τόκων είναι:

$$I = R \cdot n - K = 6.000 \cdot 25 - 93.750 = 56.250$$

Άσκηση 3

Κάποιος δανείστηκε €100.000 με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, για 20 χρόνια και πληρώνει ετήσια δόση €7.812,5. Να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού.

Λύση

Από τον τύπο του προοδευτικού χρεολυσίου έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}\right) \Rightarrow K = \frac{R}{i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}} = R \cdot \frac{1}{i + P_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}} \Rightarrow K = R \cdot a_{\overline{n|}\,\mathrm{i}}$$

Οπότε:

$$a_{\overline{n|}\,\mathrm{i}} = \frac{K}{R} \Rightarrow a_{\overline{20|}\,\mathrm{i}} = \frac{100.000}{7.812,5} \Rightarrow a_{\overline{20|}\,\mathrm{i}} = 12,8$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε:

$$a_{\overline{20|}\,0,045} = 13,00794 \text{ και } a_{\overline{20|}\,0,05} = 12,46221$$

Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παρεμβολής.

Για διαφορά στο επιτόκιο 0,005 έχουμε διαφορά στην τιμή 0,54573

Για ποια διαφορά στο επιτόκιο θα έχουμε διαφορά στην τιμή 0,33779 (12,8-12,46221);.

$$\begin{array}{|cc} 0,005 & 0,54573 \\ X; & 0,33779 \\ \hline \end{array}$$

$$X = 0,005 \cdot \frac{0,33779}{0,54573} \simeq 0,0031$$

Οπότε το επιτόκιο δανεισμού είναι: 0,05-0,0031=0,0469, δηλαδή 4,69%.

Άσκηση 4

Κάποιος δανείστηκε με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου €120.000 με ετήσιο επιτόκιο 4% και ετήσια δόση €8.000. Να βρεθεί ο αριθμός των δόσεων που απαιτούνται για την εξόφληση του δανείου.

Λύση

Για να βρούμε τον αριθμό των δόσεων για την εξόφληση του δανείου έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{n|}\,i}\right) \Rightarrow 8.000 = 120.000 \cdot \left(0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04}\right) \Rightarrow 0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = \frac{8.000}{120.000} \Rightarrow$$

$$0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = \frac{7.500}{120.000} \Rightarrow 0,04 + P_{\overline{n|}\,0,04} = 0,0625 \Rightarrow P_{\overline{n|}\,0,04} = 0,0225 .$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι:

$$P_{\overline{26|}\,0,04} \simeq 0,0225 .$$

Συνεπώς η εξόφληση του δανείου θα πραγματοποιηθεί σε 26 ετήσιες δόσεις.

Άσκηση 5

Δανείστηκε κάποιος με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου, με ετήσιο επιτόκιο 5% για 6 χρόνια. Αν το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της 4ης περιόδου είναι €29.314,4, να βρεθεί το ποσό του δανεισμού και να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης.

Λύση

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι: $P_{\overline{6|}\,0,05} \simeq 0,147$ και $S_{\overline{4|}\,0,05} \simeq 4,31$.

Επειδή το υπόλοιπο ανεξόφλητο ποσό της 4ης περιόδου είναι €29.314,4 έχουμε:

$$Y_4 = K \cdot \left(1 - P_{\overline{6|}\,0,05} \cdot S_{\overline{4|}\,0,05}\right) \Rightarrow 29.314,4 = K \cdot \left(1 - 0,147 \cdot 4,31\right) \Rightarrow$$

$$29.314,4 = K \cdot \left(1 - 0,147 \cdot 4,31\right) \Rightarrow K = \frac{29.314,4}{0,36643} = 80.000$$

Για τον πίνακα απόσβεσης του δανείου έχουμε:

Το τοκοχρεολύσιο θα είναι: $R = K \cdot i + K \cdot P_{\overline{n|}\,i}$ οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{6|}\,0,05}\right) = 80.000 \cdot \left(0,05 + 0,14701747\right) = 15.761,4$$

Ο τόκος της 1ης περιόδου θα είναι $I = K \cdot i = 80.000 \cdot 0,05 = 4.000$.

Όμοια βρίσκουμε τα στοιχεία του δανείου για να συμπληρώσουμε τον ακόλουθο πίνακα 6.8:

Έτος	**Τοκοχρεολύσιο**	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Πληρωμένο**	**Ανεξόφλητο**
1	15.761,4	4.000	11.761,4	11.761,4	68.238,6
2	15.761,4	3.411,93	12.349,47	24.110,87	55.889,13
3	15.761,4	2.794,46	12.966,94	37.077,81	42.922,19
4	15.761,4	2.146,11	13.615,29	50.693,1	29.306,9
5	15.761,4	1.465,35	14.296,05	64.989,15	15.010,85
6	15.761,4	750,54	15.010,86	80.000	0

Πίνακας 6.8 *Απόσβεσης δανείου*

Η απόκλιση στο ανεξόφλητο ποσό της 4ης περιόδου οφείλεται στις στρογγυλοποιήσεις των πράξεων.

Άσκηση 6

Δάνειο € 48.000 εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου σε 6 χρόνια. Αν οι τόκοι του 3ου έτους είναι €1.280 να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού και να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης

Λύση

Επειδή οι τόκοι του 3ου έτους είναι €1.280 έχουμε:

$$\left(K - \frac{2K}{6}\right) \cdot i = I \Rightarrow \left(48.000 - \frac{2 \cdot 48.000}{6}\right) \cdot i = 1.280 \Rightarrow 32.000 \cdot i = 1.280 \Rightarrow i = 0,04$$

Για την εξόφληση του κεφαλαίου λοιπόν κάθε χρόνο θα δίνουμε ποσό $\frac{48.000}{6} = 8.000$ ενώ οι τόκοι της πρώτης περιόδου θα είναι $K \cdot i = 48.000 \cdot 0,04 = 1.920$.

Όμοια εργαζόμαστε για τις υπόλοιπες περιόδους και βρίσκουμε τον πίνακα 6.9 απόσβεσης του δανείου.

Έτος	**Τοκοχρεολύσιο**	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Πληρωμένο**	**Ανεξόφλητο**
1	9.920	1.920	8.000	8.000	40.000

2	9.600	1.600	8.000	16.000	32.000
3	9.280	1.280	8.000	24.000	24.000
4	8.960	960	8.000	32.000	16.000
5	8.640	640	8.000	40.000	8.000
6	8.320	320	8.000	48.000	0

Πίνακας 6.9 *Απόσβεσης δανείου*

Άσκηση 7

Δάνειο €60.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% και η ετήσια δόση του δανείου είναι €15.058,5 να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.

Λύση

(α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου το συνολικό ποσό της δόσης είναι

$$R = I + R_1 = K \cdot \left(i + P_{\overline{n}|t}\right)$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση έχουμε:

$$R = K \cdot \left(i + P_{\overline{5}|0{,}05}\right) \Rightarrow 15.058{,}5 = 60.000 \cdot \left(i + 0{,}180975\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15.058{,}5 = 60.000 \cdot i + 10.858{,}5 \Rightarrow i = \frac{4.200}{60.000} \Rightarrow i = 0.07\,.$$

(β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου τότε έχουμε

$$R_1 = K \cdot (1+i)^n \cdot P_{\overline{n}|t} \Rightarrow 15.058{,}5 = 60.000 \cdot (1+i)^5 \cdot P_{\overline{5}|0.05} \Rightarrow (1+i)^5 = \frac{15.058{,}5}{60.000 \cdot 0{,}180975} \Rightarrow$$

$$(1+i)^5 = \frac{15.058{,}5}{60.000 \cdot 0{,}180975} \Rightarrow (1+i)^5 = 1{,}386793756 \Rightarrow 1 + i = 1{,}067584$$

Συνεπώς το επιτόκιο δανεισμού είναι 6,7584%.

Άσκηση 8

Δάνειο €50.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου. Αν το χρεολύσιο κάθε δόσης είναι €8.354,62 , να βρεθεί το επιτόκιο δανεισμού και να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Λύση

Επειδή το χρεολύσιο είναι ίσο με €8.354,62 έχουμε:

$$K \cdot P_{\overline{n}|\mathrm{i}} = 8.354{,}62 \Rightarrow 50.000 \cdot P_{\overline{5}|\mathrm{i}} = 8.354{,}62 \Rightarrow P_{\overline{5}|\mathrm{i}} = 0{,}1670924$$

Από τους οικονομικούς πίνακες βρίσκουμε ότι: $P_{\overline{5}|0{,}09} = 0{,}1670925$.

Συνεπώς το επιτόκιο δανεισμού είναι 9%.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα 6.10 απόσβεσης.

Έτος	**Τόκος**	**Χρεολύσιο**	**Τοκοχρεολύσιο**	**Πληρωμένο ποσό**	**Υπόλοιπο**
1	4.500	8.354,62	12.854,62	8.354,62	41.645,38
2	4.500	8.354,62	12.854,62	17.461,16	32.538,84
3	4.500	8.354,62	12.854,62	27.387,28	22.612,72
4	4.500	8.354,62	12.854,62	38.206,76	11.793,24
5	4.500	8.354,62	12.854,62	50.000	0

Πίνακας 6.10 *Απόσβεσης δανείου.*

6.7.2. Άλυτες ασκήσεις

1. Δάνειο €35.000 εξοφλητέο εφάπαξ, πρέπει να εξοφληθεί σε 8 χρόνια με επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η δόση του δανείου και ο πίνακας απόσβεσης (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται.

2. Δάνειο €15.000 εξοφλείται με τη μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου. Αν η διάρκεια του είναι 8 χρόνια και το επιτόκιο 7%, να συμπληρωθεί ο πίνακας απόσβεσης.
3. Δάνειο €100.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 6 χρόνια με επιτόκιο 5% και τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.
4. Δάνειο €40.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 7 χρόνια με επιτόκιο 6% με τη μέθοδο των δύο επιτοκίων. Αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 5% να βρεθεί η δόση του δανείου (α) Αν οι τόκοι καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου (β) Αν οι τόκοι δεν καταβάλλονται στο τέλος κάθε περιόδου.
5. Δάνειο €75.000 πρέπει να εξοφληθεί σε 5 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 8%. Αν το δάνειο εξοφλείται με ίσα μέρη κεφαλαίου να γίνει ο πίνακας απόσβεσης του δανείου.

Βιβλιογραφία

Αλεξανδρής, Ν. (1989). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Αποστολόπουλος, Θ. (1996). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Αποστολόπουλος, Θ. (2002). *Οικονομικά μαθηματικά και στοιχεία τραπεζικών εργασιών*. Εκδόσεις Αποστολόπουλος Θ.

Βασιλάκης, Κ. (2005). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Βόσκογλου, Μ. (1996). *Μαθηματικά για τον τομέα διοίκησης και οικονομίας*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Καραπιστόλης, Δ. (1994). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Κιόχος, Π. & Κιόχος, Α. (1999). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Κούγιας, Γ. & Γεωργίου, Δ. (2004). *Χρηματοοικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Οικονομόπουλος, Γ. (2002). *Οικονομικά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Οικονομόπουλος Γ.

Σφακιανός, Κ. & Σφακιανός, Π. (2010). *Οικονομικά Μαθηματικά με Οικονομικά Προγράμματα Υπολογιστών*. Εκδόσεις INTERBOOKS.

Τσεβάς, Αναστάσιος (2003). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Φράγκος, Χ. (2007). *Οικονομικά μαθηματικά*. Εκδόσεις Σταμούλη.

Χουβαρδάς, Β. (1998). *Οικονομικά μαθηματικά*. Μακεδονικές Εκδόσεις.

Zima, P. & Brown, R. (1997). *Outline of Mathematics of Finance, Schaums 2nd edition*. Εκδόσεις McGraw-Hill.

ΠΙΝΑΚΕΣ

$(1+i)^n$	Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από n περιόδους ανατοκισμού					
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000	1,0600000
2	1,0201000	1,0404000	1,0609000	1,0816000	1,1025000	1,1236000
3	1,0303010	1,0612080	1,0927270	1,1248640	1,1576250	1,1910160
4	1,0406040	1,0824322	1,1255088	1,1698586	1,2155063	1,2624770
5	1,0510101	1,1040808	1,1592741	1,2166529	1,2762816	1,3382256
6	1,0615202	1,1261624	1,1940523	1,2653190	1,3400956	1,4185191
7	1,0721354	1,1486857	1,2298739	1,3159318	1,4071004	1,5036303
8	1,0828567	1,1716594	1,2667701	1,3685691	1,4774554	1,5938481
9	1,0936853	1,1950926	1,3047732	1,4233118	1,5513282	1,6894790
10	1,1046221	1,2189944	1,3439164	1,4802443	1,6288946	1,7908477
11	1,1156683	1,2433743	1,3842339	1,5394541	1,7103394	1,8982986
12	1,1268250	1,2682418	1,4257609	1,6010322	1,7958563	2,0121965
13	1,1380933	1,2936066	1,4685337	1,6650735	1,8856491	2,1329283
14	1,1494742	1,3194788	1,5125897	1,7316764	1,9799316	2,2609040
15	1,1609690	1,3458683	1,5579674	1,8009435	2,0789282	2,3965582
16	1,1725786	1,3727857	1,6047064	1,8729812	2,1828746	2,5403517
17	1,1843044	1,4002414	1,6528476	1,9479005	2,2920183	2,6927728
18	1,1961475	1,4282462	1,7024331	2,0258165	2,4066192	2,8543392
19	1,2081090	1,4568112	1,7535061	2,1068492	2,5269502	3,0255995
20	1,2201900	1,4859474	1,8061112	2,1911231	2,6532977	3,2071355
21	1,2323919	1,5156663	1,8602946	2,2787681	2,7859626	3,3995636
22	1,2447159	1,5459797	1,9161034	2,3699188	2,9252607	3,6035374
23	1,2571630	1,5768993	1,9735865	2,4647155	3,0715238	3,8197497
24	1,2697346	1,6084372	2,0327941	2,5633042	3,2250999	4,0489346
25	1,2824320	1,6406060	2,0937779	2,6658363	3,3863549	4,2918707
26	1,2952563	1,6734181	2,1565913	2,7724698	3,5556727	4,5493830
27	1,3082089	1,7068865	2,2212890	2,8833686	3,7334563	4,8223459
28	1,3212910	1,7410242	2,2879277	2,9987033	3,9201291	5,1116867
29	1,3345039	1,7758447	2,3565655	3,1186515	4,1161356	5,4183879
30	1,3478489	1,8113616	2,4272625	3,2433975	4,3219424	5,7434912
31	1,3613274	1,8475888	2,5000803	3,3731334	4,5380395	6,0881006
32	1,3749407	1,8845406	2,5750828	3,5080587	4,7649415	6,4533867
33	1,3886901	1,9222314	2,6523352	3,6483811	5,0031885	6,8405899
34	1,4025770	1,9606760	2,7319053	3,7943163	5,2533480	7,2510253
35	1,4166028	1,9998896	2,8138625	3,9460890	5,5160154	7,6860868
36	1,4307688	2,0398873	2,8982783	4,1039326	5,7918161	8,1472520
37	1,4450765	2,0806851	2,9852267	4,2680899	6,0814069	8,6360871
38	1,4595272	2,1222988	3,0747835	4,4388135	6,3854773	9,1542523
39	1,4741225	2,1647448	3,1670270	4,6163660	6,7047512	9,7035075
40	1,4888637	2,2080397	3,2620378	4,8010206	7,0399887	10,2857179
41	1,5037524	2,2522005	3,3598989	4,9930615	7,3919881	10,9028610
42	1,5187899	2,2972445	3,4606959	5,1927839	7,7615876	11,5570327
43	1,5339778	2,3431894	3,5645168	5,4004953	8,1496669	12,2504546
44	1,5493176	2,3900531	3,6714523	5,6165151	8,5571503	12,9854819
45	1,5648107	2,4378542	3,7815958	5,8411757	8,9850078	13,7646108
46	1,5804589	2,4866113	3,8950437	6,0748227	9,4342582	14,5904875
47	1,5962634	2,5363435	4,0118950	6,3178156	9,9059711	15,4659167
48	1,6122261	2,5870704	4,1322519	6,5705282	10,4012696	16,3938717
49	1,6283483	2,6388118	4,2562194	6,8333494	10,9213331	17,3775040
50	1,6446318	2,6915880	4,3839060	7,1066833	11,4673998	18,4201543

Πίνακας 1 *Μέρος 1ο*

$(1+i)^n$	**Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από n περιόδους ανατοκισμού**					
	0,07	**0,08**	**0,09**	**0,1**	**0,11**	**0,12**
1	1,0700000	1,0800000	1,0900000	1,1000000	1,1100000	1,1200000
2	1,1449000	1,1664000	1,1881000	1,2100000	1,2321000	1,2544000
3	1,2250430	1,2597120	1,2950290	1,3310000	1,3676310	1,4049280
4	1,3107960	1,3604890	1,4115816	1,4641000	1,5180704	1,5735194
5	1,4025517	1,4693281	1,5386240	1,6105100	1,6850582	1,7623417
6	1,5007304	1,5868743	1,6771001	1,7715610	1,8704146	1,9738227
7	1,6057815	1,7138243	1,8280391	1,9487171	2,0761602	2,2106814
8	1,7181862	1,8509302	1,9925626	2,1435888	2,3045378	2,4759632
9	1,8384592	1,9990046	2,1718933	2,3579477	2,5580369	2,7730788
10	1,9671514	2,1589250	2,3673637	2,5937425	2,8394210	3,1058482
11	2,1048520	2,3316390	2,5804264	2,8531167	3,1517573	3,4785500
12	2,2521916	2,5181701	2,8126648	3,1384284	3,4984506	3,8959760
13	2,4098450	2,7196237	3,0658046	3,4522712	3,8832802	4,3634931
14	2,5785342	2,9371936	3,3417270	3,7974983	4,3104410	4,8871123
15	2,7590315	3,1721691	3,6424825	4,1772482	4,7845895	5,4735658
16	2,9521637	3,4259426	3,9703059	4,5949730	5,3108943	6,1303937
17	3,1588152	3,7000181	4,3276334	5,0544703	5,8950927	6,8660409
18	3,3799323	3,9960195	4,7171204	5,5599173	6,5435529	7,6899658
19	3,6165275	4,3157011	5,1416613	6,1159090	7,2633437	8,6127617
20	3,8696845	4,6609571	5,6044108	6,7274999	8,0623115	9,6462931
21	4,1405624	5,0338337	6,1088077	7,4002499	8,9491658	10,8038483
22	4,4304017	5,4365404	6,6586004	8,1402749	9,9335740	12,1003101
23	4,7405299	5,8714636	7,2578745	8,9543024	11,0262672	13,5523473
24	5,0723670	6,3411807	7,9110832	9,8497327	12,2391566	15,1786289
25	5,4274326	6,8484752	8,6230807	10,8347059	13,5854638	17,0000644
26	5,8073529	7,3963532	9,3991579	11,9181765	15,0798648	19,0400721
27	6,2138676	7,9880615	10,2450821	13,1099942	16,7386500	21,3248808
28	6,6488384	8,6271064	11,1671395	14,4209936	18,5799014	23,8838665
29	7,1142570	9,3172749	12,1721821	15,8630930	20,6236906	26,7499305
30	7,6122550	10,0626569	13,2676785	17,4494023	22,8922966	29,9599221
31	8,1451129	10,8676694	14,4617695	19,1943425	25,4104492	33,5551128
32	8,7152708	11,7370830	15,7633288	21,1137767	28,2055986	37,5817263
33	9,3253398	12,6760496	17,1820284	23,2251544	31,3082145	42,0915335
34	9,9781135	13,6901336	18,7284109	25,5476699	34,7521180	47,1425175
35	10,6765815	14,7853443	20,4139679	28,1024368	38,5748510	52,7996196
36	11,4239422	15,9681718	22,2512250	30,9126805	42,8180846	59,1355739
37	12,2236181	17,2456256	24,2538353	34,0039486	47,5280740	66,2318428
38	13,0792714	18,6252756	26,4366805	37,4043434	52,7561621	74,1796639
39	13,9948204	20,1152977	28,8159817	41,1447778	58,5593399	83,0812236
40	14,9744578	21,7245215	31,4094201	45,2592556	65,0008673	93,0509704
41	16,0226699	23,4624832	34,2362679	49,7851811	72,1509627	104,2170869
42	17,1442568	25,3394819	37,3175320	54,7636992	80,0875686	116,7231373
43	18,3443548	27,3666404	40,6761098	60,2400692	88,8972012	130,7299138
44	19,6284596	29,5559717	44,3369597	66,2640761	98,6758933	146,4175035
45	21,0024518	31,9204494	48,3272861	72,8904837	109,5302415	163,9876039
46	22,4726234	34,4740853	52,6767419	80,1795321	121,5785681	183,6661163
47	24,0457070	37,2320122	57,4176486	88,1974853	134,9522106	205,7060503
48	25,7289065	40,2105731	62,5852370	97,0172338	149,7969538	230,3907763
49	27,5299300	43,4274190	68,2179083	106,7189572	166,2746187	258,0376695
50	29,4570251	46,9016125	74,3575201	117,3908529	184,5648267	289,0021898

Πίνακας 1 *Μέρος 2ο*

$(1+i)^{\frac{\mu}{12}}$	**Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από κλασματικές περιόδους ανατοκισμού**					
	$1/12$	$2/12$	$3/12$	$4/12$	$5/12$	$6/12$
0,01	1,0008295	1,0016598	1,0024907	1,0033223	1,0041546	1,0049876
0,015	1,0012415	1,0024845	1,0037291	1,0049752	1,0062229	1,0074721
0,02	1,0016516	1,0033059	1,0049629	1,0066227	1,0082852	1,0099505
0,025	1,0020598	1,0041239	1,0061922	1,0082648	1,0103417	1,0124228
0,03	1,0024663	1,0049386	1,0074171	1,0099016	1,0123923	1,0148892
0,035	1,0028709	1,0057500	1,0086374	1,0115331	1,0144372	1,0173495
0,04	1,0032737	1,0065582	1,0098534	1,0131594	1,0164762	1,0198039
0,045	1,0036748	1,0073631	1,0110650	1,0147805	1,0185096	1,0222524
0,05	1,0040741	1,0081648	1,0122722	1,0163964	1,0205373	1,0246951
0,055	1,0044717	1,0089634	1,0134752	1,0180071	1,0225594	1,0271319
0,06	1,0048676	1,0097588	1,0146738	1,0196128	1,0245758	1,0295630
0,065	1,0052617	1,0105511	1,0158683	1,0212135	1,0265868	1,0319884
0,07	1,0056541	1,0113403	1,0170585	1,0228091	1,0285922	1,0344080
0,075	1,0060449	1,0121264	1,0182446	1,0243998	1,0305922	1,0368221
0,08	1,0064340	1,0129095	1,0194265	1,0259856	1,0325868	1,0392305
0,085	1,0068215	1,0136895	1,0206044	1,0275664	1,0345760	1,0416333
0,09	1,0072073	1,0144666	1,0217782	1,0291425	1,0365598	1,0440307
0,095	1,0075915	1,0152407	1,0229479	1,0307137	1,0385384	1,0464225
0,1	1,0079741	1,0160119	1,0241137	1,0322801	1,0405117	1,0488088
0,105	1,0083552	1,0167801	1,0252755	1,0338418	1,0424797	1,0511898
0,11	1,0087346	1,0175455	1,0264333	1,0353988	1,0444426	1,0535654
0,115	1,0091125	1,0183080	1,0275873	1,0369511	1,0464003	1,0559356
0,12	1,0094888	1,0190676	1,0287373	1,0384988	1,0483529	1,0583005

Πίνακας 2 *Μέρος 1ο*

$(1+i)^{\frac{\mu}{12}}$	**Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από κλασματικές περιόδους ανατοκισμού**				
	$7/12$	$8/12$	$9/12$	$10/12$	$11/12$
0,01	1,0058212	1,0066556	1,0074907	1,0083264	1,0091629
0,015	1,0087228	1,0099752	1,0112290	1,0124845	1,0137415
0,02	1,0116185	1,0132893	1,0149628	1,0166391	1,0183182
0,025	1,0145083	1,0165980	1,0186920	1,0207903	1,0228930
0,03	1,0173921	1,0199013	1,0224167	1,0249382	1,0274660
0,035	1,0202702	1,0231993	1,0261368	1,0290827	1,0320371
0,04	1,0231425	1,0264920	1,0298524	1,0332239	1,0366064
0,045	1,0260090	1,0297794	1,0335636	1,0373618	1,0411739
0,05	1,0288698	1,0330616	1,0372704	1,0414963	1,0457395
0,055	1,0317250	1,0363385	1,0409727	1,0456276	1,0503034
0,06	1,0345745	1,0396103	1,0446707	1,0497557	1,0548654
0,065	1,0374184	1,0428770	1,0483643	1,0538804	1,0594256
0,07	1,0402567	1,0461385	1,0520535	1,0580020	1,0639841
0,075	1,0430896	1,0493950	1,0557385	1,0621203	1,0685408
0,08	1,0459169	1,0526464	1,0594191	1,0662355	1,0730957
0,085	1,0487388	1,0558928	1,0630956	1,0703475	1,0776488
0,09	1,0515553	1,0591342	1,0667677	1,0744563	1,0822002
0,095	1,0543664	1,0623707	1,0704357	1,0785620	1,0867499
0,1	1,0571722	1,0656022	1,0740995	1,0826645	1,0912978
0,105	1,0599727	1,0688289	1,0777591	1,0867640	1,0958441
0,11	1,0627678	1,0720507	1,0814146	1,0908603	1,1003886
0,115	1,0655578	1,0752676	1,0850660	1,0949536	1,1049313
0,12	1,0683425	1,0784798	1,0887133	1,0990438	1,1094724

Πίνακας 2 *Μέρος 2ο*

$U^n = (1+i)^{-n}$ **Παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από** n **περιόδους ανατοκισμού**						
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
1	0,9900990	0,9803922	0,9708738	0,9615385	0,9523810	0,9433962
2	0,9802960	0,9611688	0,9425959	0,9245562	0,9070295	0,8899964
3	0,9705901	0,9423223	0,9151417	0,8889964	0,8638376	0,8396193
4	0,9609803	0,9238454	0,8884870	0,8548042	0,8227025	0,7920937
5	0,9514657	0,9057308	0,8626088	0,8219271	0,7835262	0,7472582
6	0,9420452	0,8879714	0,8374843	0,7903145	0,7462154	0,7049605
7	0,9327181	0,8705602	0,8130915	0,7599178	0,7106813	0,6650571
8	0,9234832	0,8534904	0,7894092	0,7306902	0,6768394	0,6274124
9	0,9143398	0,8367553	0,7664167	0,7025867	0,6446089	0,5918985
10	0,9052870	0,8203483	0,7440939	0,6755642	0,6139133	0,5583948
11	0,8963237	0,8042630	0,7224213	0,6495809	0,5846793	0,5267875
12	0,8874492	0,7884932	0,7013799	0,6245970	0,5568374	0,4969694
13	0,8786626	0,7730325	0,6809513	0,6005741	0,5303214	0,4688390
14	0,8699630	0,7578750	0,6611178	0,5774751	0,5050680	0,4423010
15	0,8613495	0,7430147	0,6418619	0,5552645	0,4810171	0,4172651
16	0,8528213	0,7284458	0,6231669	0,5339082	0,4581115	0,3936463
17	0,8443775	0,7141626	0,6050164	0,5133732	0,4362967	0,3713644
18	0,8360173	0,7001594	0,5873946	0,4936281	0,4155207	0,3503438
19	0,8277399	0,6864308	0,5702860	0,4746424	0,3957340	0,3305130
20	0,8195445	0,6729713	0,5536758	0,4563869	0,3768895	0,3118047
21	0,8114302	0,6597758	0,5375493	0,4388336	0,3589424	0,2941554
22	0,8033962	0,6468390	0,5218925	0,4219554	0,3418499	0,2775051
23	0,7954418	0,6341559	0,5066917	0,4057263	0,3255713	0,2617973
24	0,7875661	0,6217215	0,4919337	0,3901215	0,3100679	0,2469785
25	0,7797684	0,6095309	0,4776056	0,3751168	0,2953028	0,2329986
26	0,7720480	0,5975793	0,4636947	0,3606892	0,2812407	0,2198100
27	0,7644039	0,5858620	0,4501891	0,3468166	0,2678483	0,2073680
28	0,7568356	0,5743746	0,4370768	0,3334775	0,2550936	0,1956301
29	0,7493421	0,5631123	0,4243464	0,3206514	0,2429463	0,1845567
30	0,7419229	0,5520709	0,4119868	0,3083187	0,2313774	0,1741101
31	0,7345771	0,5412460	0,3999871	0,2964603	0,2203595	0,1642548
32	0,7273041	0,5306333	0,3883370	0,2850579	0,2098662	0,1549574
33	0,7201031	0,5202287	0,3770262	0,2740942	0,1998725	0,1461862
34	0,7129733	0,5100282	0,3660449	0,2635521	0,1903548	0,1379115
35	0,7059142	0,5000276	0,3553834	0,2534155	0,1812903	0,1301052
36	0,6989249	0,4902232	0,3450324	0,2436687	0,1726574	0,1227408
37	0,6920049	0,4806109	0,3349829	0,2342968	0,1644356	0,1157932
38	0,6851534	0,4711872	0,3252262	0,2252854	0,1566054	0,1092389
39	0,6783697	0,4619482	0,3157535	0,2166206	0,1491480	0,1030555
40	0,6716531	0,4528904	0,3065568	0,2082890	0,1420457	0,0972222
41	0,6650031	0,4440102	0,2976280	0,2002779	0,1352816	0,0917190
42	0,6584189	0,4353041	0,2889592	0,1925749	0,1288396	0,0865274
43	0,6518999	0,4267688	0,2805429	0,1851682	0,1227044	0,0816296
44	0,6454455	0,4184007	0,2723718	0,1780463	0,1168613	0,0770091
45	0,6390549	0,4101968	0,2644386	0,1711984	0,1112965	0,0726501
46	0,6327276	0,4021537	0,2567365	0,1646139	0,1059967	0,0685378
47	0,6264630	0,3942684	0,2492588	0,1582826	0,1009492	0,0646583
48	0,6202604	0,3865376	0,2419988	0,1521948	0,0961421	0,0609984
49	0,6141192	0,3789584	0,2349503	0,1463411	0,0915639	0,0575457
50	0,6080388	0,3715279	0,2281071	0,1407126	0,0872037	0,0542884

Πίνακας 3 *Μέρος 1ο*

$U^n = (1+i)^{-n}$ **Παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας μετά από n περιόδους ανατοκισμού**						
	0,07	**0,08**	**0,09**	**0,1**	**0,11**	**0,12**
1	0,9345794	0,9259259	0,9174312	0,9090909	0,9009009	0,8928571
2	0,8734387	0,8573388	0,8416800	0,8264463	0,8116224	0,7971939
3	0,8162979	0,7938322	0,7721835	0,7513148	0,7311914	0,7117802
4	0,7628952	0,7350299	0,7084252	0,6830135	0,6587310	0,6355181
5	0,7129862	0,6805832	0,6499314	0,6209213	0,5934513	0,5674269
6	0,6663422	0,6301696	0,5962673	0,5644739	0,5346408	0,5066311
7	0,6227497	0,5834904	0,5470342	0,5131581	0,4816584	0,4523492
8	0,5820091	0,5402689	0,5018663	0,4665074	0,4339265	0,4038832
9	0,5439337	0,5002490	0,4604278	0,4240976	0,3909248	0,3606100
10	0,5083493	0,4631935	0,4224108	0,3855433	0,3521845	0,3219732
11	0,4750928	0,4288829	0,3875329	0,3504939	0,3172833	0,2874761
12	0,4440120	0,3971138	0,3555347	0,3186308	0,2858408	0,2566751
13	0,4149644	0,3676979	0,3261786	0,2896644	0,2575143	0,2291742
14	0,3878172	0,3404610	0,2992465	0,2633313	0,2319948	0,2046198
15	0,3624460	0,3152417	0,2745380	0,2393920	0,2090043	0,1826963
16	0,3387346	0,2918905	0,2518698	0,2176291	0,1882922	0,1631217
17	0,3165744	0,2702690	0,2310732	0,1978447	0,1696326	0,1456443
18	0,2958639	0,2502490	0,2119937	0,1798588	0,1528222	0,1300396
19	0,2765083	0,2317121	0,1944897	0,1635080	0,1376776	0,1161068
20	0,2584190	0,2145482	0,1784309	0,1486436	0,1240339	0,1036668
21	0,2415131	0,1986557	0,1636981	0,1351306	0,1117423	0,0925596
22	0,2257132	0,1839405	0,1501817	0,1228460	0,1006687	0,0826425
23	0,2109469	0,1703153	0,1377814	0,1116782	0,0906925	0,0737880
24	0,1971466	0,1576993	0,1264049	0,1015256	0,0817050	0,0658821
25	0,1842492	0,1460179	0,1159678	0,0922960	0,0736081	0,0588233
26	0,1721955	0,1352018	0,1063925	0,0839055	0,0663136	0,0525208
27	0,1609304	0,1251868	0,0976078	0,0762777	0,0597420	0,0468936
28	0,1504022	0,1159137	0,0895484	0,0693433	0,0538216	0,0418693
29	0,1405628	0,1073275	0,0821545	0,0630394	0,0484879	0,0373833
30	0,1313671	0,0993773	0,0753711	0,0573086	0,0436828	0,0333779
31	0,1227730	0,0920160	0,0691478	0,0520987	0,0393539	0,0298017
32	0,1147411	0,0852000	0,0634384	0,0473624	0,0354540	0,0266087
33	0,1072347	0,0788889	0,0582003	0,0430568	0,0319405	0,0237577
34	0,1002193	0,0730453	0,0533948	0,0391425	0,0287752	0,0212123
35	0,0936629	0,0676345	0,0489861	0,0355841	0,0259236	0,0189395
36	0,0875355	0,0626246	0,0449413	0,0323492	0,0233546	0,0169103
37	0,0818088	0,0579857	0,0412306	0,0294083	0,0210402	0,0150985
38	0,0764569	0,0536905	0,0378262	0,0267349	0,0189551	0,0134808
39	0,0714550	0,0497134	0,0347030	0,0243044	0,0170767	0,0120364
40	0,0667804	0,0460309	0,0318376	0,0220949	0,0153844	0,0107468
41	0,0624116	0,0426212	0,0292088	0,0200863	0,0138598	0,0095954
42	0,0583286	0,0394641	0,0267971	0,0182603	0,0124863	0,0085673
43	0,0545127	0,0365408	0,0245845	0,0166002	0,0112489	0,0076494
44	0,0509464	0,0338341	0,0225545	0,0150911	0,0101342	0,0068298
45	0,0476135	0,0313279	0,0206922	0,0137192	0,0091299	0,0060980
46	0,0444986	0,0290073	0,0189837	0,0124720	0,0082251	0,0054447
47	0,0415875	0,0268586	0,0174162	0,0113382	0,0074100	0,0048613
48	0,0388668	0,0248691	0,0159782	0,0103074	0,0066757	0,0043405
49	0,0363241	0,0230269	0,0146589	0,0093704	0,0060141	0,0038754
50	0,0339478	0,0213212	0,0134485	0,0085186	0,0054182	0,0034602

Πίνακας 3 *Μέρος 2ο*

$a_{\overline{n}\rvert i}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ **Παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας ληξιπρόθεσμης ράντας** n **όρων**						
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
1	0,9900990	0,9803922	0,9708738	0,9615385	0,9523810	0,9433962
2	1,9703951	1,9415609	1,9134697	1,8860947	1,8594104	1,8333927
3	2,9409852	2,8838833	2,8286114	2,7750910	2,7232480	2,6730119
4	3,9019656	3,8077287	3,7170984	3,6298952	3,5459505	3,4651056
5	4,8534312	4,7134595	4,5797072	4,4518223	4,3294767	4,2123638
6	5,7954765	5,6014309	5,4171914	5,2421369	5,0756921	4,9173243
7	6,7281945	6,4719911	6,2302830	6,0020547	5,7863734	5,5823814
8	7,6516778	7,3254814	7,0196922	6,7327449	6,4632128	6,2097938
9	8,5660176	8,1622367	7,7861089	7,4353316	7,1078217	6,8016923
10	9,4713045	8,9825850	8,5302028	8,1108958	7,7217349	7,3600871
11	10,3676282	9,7868480	9,2526241	8,7604767	8,3064142	7,8868746
12	11,2550775	10,5753412	9,9540040	9,3850738	8,8632516	8,3838439
13	12,1337401	11,3483737	10,6349553	9,9856478	9,3935730	8,8526830
14	13,0037030	12,1062488	11,2960731	10,5631229	9,8986409	9,2949839
15	13,8650525	12,8492635	11,9379351	11,1183874	10,3796580	9,7122490
16	14,7178738	13,5777093	12,5611020	11,6522956	10,8377696	10,1058953
17	15,5622513	14,2918719	13,1661185	12,1656689	11,2740662	10,4772597
18	16,3982686	14,9920313	13,7535131	12,6592970	11,6895869	10,8276035
19	17,2260085	15,6784620	14,3237991	13,1339394	12,0853209	11,1581165
20	18,0455530	16,3514333	14,8774749	13,5903263	12,4622103	11,4699212
21	18,8569831	17,0112092	15,4150241	14,0291599	12,8211527	11,7640766
22	19,6603793	17,6580482	15,9369166	14,4511153	13,1630026	12,0415817
23	20,4558211	18,2922041	16,4436084	14,8568417	13,4885739	12,3033790
24	21,2433873	18,9139256	16,9355421	15,2469631	13,7986418	12,5503575
25	22,0231557	19,5234565	17,4131477	15,6220799	14,0939446	12,7833562
26	22,7952037	20,1210358	17,8768424	15,9827692	14,3751853	13,0031662
27	23,5596076	20,7068978	18,3270315	16,3295857	14,6430336	13,2105341
28	24,3164432	21,2812724	18,7641082	16,6630632	14,8981273	13,4061643
29	25,0657853	21,8443847	19,1884546	16,9837146	15,1410736	13,5907210
30	25,8077082	22,3964556	19,6004413	17,2920333	15,3724510	13,7648312
31	26,5422854	22,9377015	20,0004285	17,5884936	15,5928105	13,9290860
32	27,2695895	23,4683348	20,3887655	17,8735515	15,8026767	14,0840434
33	27,9896925	23,9885636	20,7657918	18,1476457	16,0025492	14,2302296
34	28,7026659	24,4985917	21,1318367	18,4111978	16,1929040	14,3681411
35	29,4085801	24,9986193	21,4872201	18,6646132	16,3741943	14,4982464
36	30,1075050	25,4888425	21,8322525	18,9082820	16,5468517	14,6209871
37	30,7995099	25,9694534	22,1672354	19,1425788	16,7112873	14,7367803
38	31,4846633	26,4406406	22,4924616	19,3678642	16,8678927	14,8460192
39	32,1630330	26,9025888	22,8082151	19,5844848	17,0170407	14,9490747
40	32,8346861	27,3554792	23,1147720	19,7927739	17,1590864	15,0462969
41	33,4996892	27,7994895	23,4124000	19,9930518	17,2943680	15,1380159
42	34,1581081	28,2347936	23,7013592	20,1856267	17,4232076	15,2245433
43	34,8100081	28,6615623	23,9819021	20,3707949	17,5459120	15,3061729
44	35,4554535	29,0799631	24,2542739	20,5488413	17,6627733	15,3831820
45	36,0945084	29,4901599	24,5187125	20,7200397	17,7740698	15,4558321
46	36,7272361	29,8923136	24,7754491	20,8846536	17,8800665	15,5243699
47	37,3536991	30,2865820	25,0247078	21,0429361	17,9810157	15,5890282
48	37,9739595	30,6731196	25,2667066	21,1951309	18,0771578	15,6500266
49	38,5880787	31,0520780	25,5016569	21,3414720	18,1687217	15,7075723
50	39,1961175	31,4236059	25,7297640	21,4821846	18,2559255	15,7618606

Πίνακας 4 *Μέρος 1ο*

$a_{\overline{n}\mid i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ **Παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας ληξιπρόθεσμης ράντας** n **όρων**						
	0,07	**0,08**	**0,09**	**0,10**	**0,11**	**0,12**
1	0,9345794	0,9259259	0,9174312	0,9090909	0,9009009	0,8928571
2	1,8080182	1,7832647	1,7591112	1,7355372	1,7125233	1,6900510
3	2,6243160	2,5770970	2,5312947	2,4868520	2,4437147	2,4018313
4	3,3872113	3,3121268	3,2397199	3,1698654	3,1024457	3,0373493
5	4,1001974	3,9927100	3,8896513	3,7907868	3,6958970	3,6047762
6	4,7665397	4,6228797	4,4859186	4,3552607	4,2305379	4,1114073
7	5,3892894	5,2063701	5,0329528	4,8684188	4,7121963	4,5637565
8	5,9712985	5,7466389	5,5348191	5,3349262	5,1461228	4,9676398
9	6,5152322	6,2468879	5,9952469	5,7590238	5,5370475	5,3282498
10	7,0235815	6,7100814	6,4176577	6,1445671	5,8892320	5,6502230
11	7,4986743	7,1389643	6,8051906	6,4950610	6,2065153	5,9376991
12	7,9426863	7,5360780	7,1607253	6,8136918	6,4923561	6,1943742
13	8,3576507	7,9037759	7,4869039	7,1033562	6,7498704	6,4235484
14	8,7454680	8,2442370	7,7861504	7,3666875	6,9818652	6,6281682
15	9,1079140	8,5594787	8,0606884	7,6060795	7,1908696	6,8108645
16	9,4466486	8,8513692	8,3125582	7,8237086	7,3791618	6,9739862
17	9,7632230	9,1216381	8,5436314	8,0215533	7,5487944	7,1196305
18	10,0590869	9,3718871	8,7556251	8,2014121	7,7016166	7,2496701
19	10,3355952	9,6035992	8,9501148	8,3649201	7,8392942	7,3657769
20	10,5940142	9,8181474	9,1285457	8,5135637	7,9633281	7,4694436
21	10,8355273	10,0168032	9,2922437	8,6486943	8,0750704	7,5620032
22	11,0612405	10,2007437	9,4424254	8,7715403	8,1757391	7,6446457
23	11,2721874	10,3710589	9,5802068	8,8832184	8,2664316	7,7184337
24	11,4693340	10,5287583	9,7066118	8,9847440	8,3481366	7,7843158
25	11,6535832	10,6747762	9,8225796	9,0770400	8,4217447	7,8431391
26	11,8257787	10,8099780	9,9289721	9,1609455	8,4880583	7,8956599
27	11,9867090	10,9351648	10,0265799	9,2372232	8,5478002	7,9425535
28	12,1371113	11,0510785	10,1161284	9,3065665	8,6016218	7,9844228
29	12,2776741	11,1584060	10,1982829	9,3696059	8,6501098	8,0218060
30	12,4090412	11,2577833	10,2736540	9,4269145	8,6937926	8,0551840
31	12,5318142	11,3497994	10,3428019	9,4790132	8,7331465	8,0849857
32	12,6465553	11,4349994	10,4062403	9,5263756	8,7686004	8,1115944
33	12,7537900	11,5138884	10,4644406	9,5694324	8,8005409	8,1353521
34	12,8540094	11,5869337	10,5178354	9,6085749	8,8293161	8,1565644
35	12,9476723	11,6545682	10,5668215	9,6441590	8,8552398	8,1755039
36	13,0352078	11,7171928	10,6117628	9,6765082	8,8785944	8,1924142
37	13,1170166	11,7751785	10,6529934	9,7059165	8,8996346	8,2075127
38	13,1934735	11,8288690	10,6908196	9,7326514	8,9185897	8,2209935
39	13,2649285	11,8785824	10,7255226	9,7569558	8,9356664	8,2330299
40	13,3317088	11,9246133	10,7573602	9,7790507	8,9510508	8,2437767
41	13,3941204	11,9672346	10,7865690	9,7991370	8,9649106	8,2533720
42	13,4524490	12,0066987	10,8133660	9,8173973	8,9773970	8,2619393
43	13,5069617	12,0432395	10,8379505	9,8339975	8,9886459	8,2695887
44	13,5579081	12,0770736	10,8605050	9,8490887	8,9987801	8,2764185
45	13,6055216	12,1084015	10,8811973	9,8628079	9,0079100	8,2825165
46	13,6500202	12,1374088	10,9001810	9,8752799	9,0161351	8,2879611
47	13,6916076	12,1642674	10,9175972	9,8866181	9,0235452	8,2928225
48	13,7304744	12,1891365	10,9335755	9,8969255	9,0302209	8,2971629
49	13,7667985	12,2121634	10,9482344	9,9062959	9,0362350	8,3010383
50	13,8007463	12,2334846	10,9616829	9,9148145	9,0416532	8,3044985

Πίνακας 4 *Μέρος 2ο*

$S_{\overline{n}\rceil i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ **Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας ληξιπρόθεσμης ράντας n όρων**						
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0100000	2,0200000	2,0300000	2,0400000	2,0500000	2,0600000
3	3,0301000	3,0604000	3,0909000	3,1216000	3,1525000	3,1836000
4	4,0604010	4,1216080	4,1836270	4,2464640	4,3101250	4,3746160
5	5,1010050	5,2040402	5,3091358	5,4163226	5,5256313	5,6370930
6	6,1520151	6,3081210	6,4684099	6,6329755	6,8019128	6,9753185
7	7,2135352	7,4342834	7,6624622	7,8982945	8,1420085	8,3938376
8	8,2856706	8,5829691	8,8923360	9,2142263	9,5491089	9,8974679
9	9,3685273	9,7546284	10,1591061	10,5827953	11,0265643	11,4913160
10	10,4622125	10,9497210	11,4638793	12,0061071	12,5778925	13,1807949
11	11,5668347	12,1687154	12,8077957	13,4863514	14,2067872	14,9716426
12	12,6825030	13,4120897	14,1920296	15,0258055	15,9171265	16,8699412
13	13,8093280	14,6803315	15,6177904	16,6268377	17,7129828	18,8821377
14	14,9474213	15,9739382	17,0863242	18,2919112	19,5986320	21,0150659
15	16,0968955	17,2934169	18,5989139	20,0235876	21,5785636	23,2759699
16	17,2578645	18,6392853	20,1568813	21,8245311	23,6574918	25,6725281
17	18,4304431	20,0120710	21,7615877	23,6975124	25,8403664	28,2128798
18	19,6147476	21,4123124	23,4144354	25,6454129	28,1323847	30,9056525
19	20,8108950	22,8405586	25,1168684	27,6712294	30,5390039	33,7599917
20	22,0190040	24,2973698	26,8703745	29,7780786	33,0659541	36,7855912
21	23,2391940	25,7833172	28,6764857	31,9692017	35,7192518	39,9927267
22	24,4715860	27,2989835	30,5367803	34,2479698	38,5052144	43,3922903
23	25,7163018	28,8449632	32,4528837	36,6178886	41,4304751	46,9958277
24	26,9734649	30,4218625	34,4264702	39,0826041	44,5019989	50,8155774
25	28,2431995	32,0302997	36,4592643	41,6459083	47,7270988	54,8645120
26	29,5256315	33,6709057	38,5530423	44,3117446	51,1134538	59,1563827
27	30,8208878	35,3443238	40,7096335	47,0842144	54,6691264	63,7057657
28	32,1290967	37,0512103	42,9309225	49,9675830	58,4025828	68,5281116
29	33,4503877	38,7922345	45,2188502	52,9662863	62,3227119	73,6397983
30	34,7848915	40,5680792	47,5754157	56,0849378	66,4388475	79,0581862
31	36,1327404	42,3794408	50,0026782	59,3283353	70,7607899	84,8016774
32	37,4940679	44,2270296	52,5027585	62,7014687	75,2988294	90,8897780
33	38,8690085	46,1115702	55,0778413	66,2095274	80,0637708	97,3431647
34	40,2576986	48,0338016	57,7301765	69,8579085	85,0669594	104,1837546
35	41,6602756	49,9944776	60,4620818	73,6522249	90,3203074	111,4347799
36	43,0768784	51,9943672	63,2759443	77,5983138	95,8363227	119,1208667
37	44,5076471	54,0342545	66,1742226	81,7022464	101,6281389	127,2681187
38	45,9527236	56,1149396	69,1594493	85,9703363	107,7095458	135,9042058
39	47,4122509	58,2372384	72,2342328	90,4091497	114,0950231	145,0584581
40	48,8863734	60,4019832	75,4012597	95,0255157	120,7997742	154,7619656
41	50,3752371	62,6100228	78,6632975	99,8265363	127,8397630	165,0476836
42	51,8789895	64,8622233	82,0231965	104,8195978	135,2317511	175,9505446
43	53,3977794	67,1594678	85,4838923	110,0123817	142,9933387	187,5075772
44	54,9317572	69,5026571	89,0484091	115,4128770	151,1430056	199,7580319
45	56,4810747	71,8927103	92,7198614	121,0293920	159,7001559	212,7435138
46	58,0458855	74,3305645	96,5014572	126,8705677	168,6851637	226,5081246
47	59,6263443	76,8171758	100,3965009	132,9453904	178,1194218	241,0986121
48	61,2226078	79,3535193	104,4083960	139,2632060	188,0253929	256,5645288
49	62,8348338	81,9405897	108,5406479	145,8337343	198,4266626	272,9584006
50	64,4631822	84,5794015	112,7968673	152,6670837	209,3479957	290,3359046

Πίνακας 5 *Μέρος 1ο*

$S_{\overline{n}\rceil i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ **Τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας ληξιπρόθεσμης ράντας** n **όρων**						
	0,07	**0,08**	**0,09**	**0,1**	**0,11**	**0,12**
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0700000	2,0800000	2,0900000	2,1000000	2,1100000	2,1200000
3	3,2149000	3,2464000	3,2781000	3,3100000	3,3421000	3,3744000
4	4,4399430	4,5061120	4,5731290	4,6410000	4,7097310	4,7793280
5	5,7507390	5,8666010	5,9847106	6,1051000	6,2278014	6,3528474
6	7,1532907	7,3359290	7,5233346	7,7156100	7,9128596	8,1151890
7	8,6540211	8,9228034	9,2004347	9,4871710	9,7832741	10,0890117
8	10,2598026	10,6366276	11,0284738	11,4358881	11,8594343	12,2996931
9	11,9779887	12,4875578	13,0210364	13,5794769	14,1639720	14,7756563
10	13,8164480	14,4865625	15,1929297	15,9374246	16,7220090	17,5487351
11	15,7835993	16,6454875	17,5602934	18,5311671	19,5614300	20,6545833
12	17,8884513	18,9771265	20,1407198	21,3842838	22,7131872	24,1331333
13	20,1406429	21,4952966	22,9533846	24,5227121	26,2116378	28,0291093
14	22,5504879	24,2149203	26,0191892	27,9749834	30,0949180	32,3926024
15	25,1290220	27,1521139	29,3609162	31,7724817	34,4053590	37,2797147
16	27,8880536	30,3242830	33,0033987	35,9497299	39,1899485	42,7532804
17	30,8402173	33,7502257	36,9737046	40,5447028	44,5008428	48,8836741
18	33,9990325	37,4502437	41,3013380	45,5991731	50,3959355	55,7497150
19	37,3789648	41,4462632	46,0184584	51,1590904	56,9394884	63,4396808
20	40,9954923	45,7619643	51,1601196	57,2749995	64,2028321	72,0524424
21	44,8651768	50,4229214	56,7645304	64,0024994	72,2651437	81,6987355
22	49,0057392	55,4567552	62,8733381	71,4027494	81,2143095	92,5025838
23	53,4361409	60,8932956	69,5319386	79,5430243	91,1478835	104,6028939
24	58,1766708	66,7647592	76,7898131	88,4973268	102,1741507	118,1552411
25	63,2490377	73,1059400	84,7008962	98,3470594	114,4133073	133,3338701
26	68,6764704	79,9544151	93,3239769	109,1817654	127,9987711	150,3339345
27	74,4838233	87,3507684	102,7231348	121,0999419	143,0786359	169,3740066
28	80,6976909	95,3388298	112,9682169	134,2099361	159,8172859	190,6988874
29	87,3465293	103,9659362	124,1353565	148,6309297	178,3971873	214,5827539
30	94,4607863	113,2832111	136,3075385	164,4940227	199,0208779	241,3326843
31	102,0730414	123,3458680	149,5752170	181,9434250	221,9131745	271,2926065
32	110,2181543	134,2135374	164,0369865	201,1377675	247,3236237	304,8477192
33	118,9334251	145,9506204	179,8003153	222,2515442	275,5292223	342,4294455
34	128,2587648	158,6266701	196,9823437	245,4766986	306,8374368	384,5209790
35	138,2368784	172,3168037	215,7107547	271,0243685	341,5895548	431,6634965
36	148,9134598	187,1021480	236,1247226	299,1268053	380,1644058	484,4631161
37	160,3374020	203,0703198	258,3759476	330,0394859	422,9824905	543,5986900
38	172,5610202	220,3159454	282,6297829	364,0434344	470,5105644	609,8305328
39	185,6402916	238,9412210	309,0664633	401,4477779	523,2667265	684,0101967
40	199,6351120	259,0565187	337,8824450	442,5925557	581,8260664	767,0914203
41	214,6095698	280,7810402	369,2918651	487,8518112	646,8269337	860,1423908
42	230,6322397	304,2435234	403,5281330	537,6369924	718,9778964	964,3594777
43	247,7764965	329,5830053	440,8456649	592,4006916	799,0654650	1081,0826150
44	266,1208513	356,9496457	481,5217748	652,6407608	887,9626662	1211,8125288
45	285,7493108	386,5056174	525,8587345	718,9048369	986,6385595	1358,2300323
46	306,7517626	418,4260668	574,1860206	791,7953205	1096,1688010	1522,2176361
47	329,2243860	452,9001521	626,8627625	871,9748526	1217,7473691	1705,8837525
48	353,2700930	490,1321643	684,2804111	960,1723378	1352,6995797	1911,5898028
49	378,9989995	530,3427374	746,8656481	1057,1895716	1502,4965335	2141,9805791
50	406,5289295	573,7701564	815,0835564	1163,9085288	1668,7711522	2400,0182486

Πίνακας 5 *Μέρος 2ο*

$P_{\overline{n}\rvert i} = \dfrac{1}{S_{\overline{n}\rvert i}}$ **Χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας, που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου**						
	0,01	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	0,4975124	0,4950495	0,4926108	0,4901961	0,4878049	0,4854369
3	0,3300221	0,3267547	0,3235304	0,3203485	0,3172086	0,3141098
4	0,2462811	0,2426238	0,2390270	0,2354900	0,2320118	0,2285915
5	0,1960398	0,1921584	0,1883546	0,1846271	0,1809748	0,1773964
6	0,1625484	0,1585258	0,1545975	0,1507619	0,1470175	0,1433626
7	0,1386283	0,1345120	0,1305064	0,1266096	0,1228198	0,1191350
8	0,1206903	0,1165098	0,1124564	0,1085278	0,1047218	0,1010359
9	0,1067404	0,1025154	0,0984339	0,0944930	0,0906901	0,0870222
10	0,0955821	0,0913265	0,0872305	0,0832909	0,0795046	0,0758680
11	0,0864541	0,0821779	0,0780774	0,0741490	0,0703889	0,0667929
12	0,0788488	0,0745596	0,0704621	0,0665522	0,0628254	0,0592770
13	0,0724148	0,0681184	0,0640295	0,0601437	0,0564558	0,0529601
14	0,0669012	0,0626020	0,0585263	0,0546690	0,0510240	0,0475849
15	0,0621238	0,0578255	0,0537666	0,0499411	0,0463423	0,0429628
16	0,0579446	0,0536501	0,0496108	0,0458200	0,0422699	0,0389521
17	0,0542581	0,0499698	0,0459525	0,0421985	0,0386991	0,0354448
18	0,0509820	0,0467021	0,0427087	0,0389933	0,0355462	0,0323565
19	0,0480518	0,0437818	0,0398139	0,0361386	0,0327450	0,0296209
20	0,0454153	0,0411567	0,0372157	0,0335818	0,0302426	0,0271846
21	0,0430308	0,0387848	0,0348718	0,0312801	0,0279961	0,0250045
22	0,0408637	0,0366314	0,0327474	0,0291988	0,0259705	0,0230456
23	0,0388858	0,0346681	0,0308139	0,0273091	0,0241368	0,0212785
24	0,0370735	0,0328711	0,0290474	0,0255868	0,0224709	0,0196790
25	0,0354068	0,0312204	0,0274279	0,0240120	0,0209525	0,0182267
26	0,0338689	0,0296992	0,0259383	0,0225674	0,0195643	0,0169043
27	0,0324455	0,0282931	0,0245642	0,0212385	0,0182919	0,0156972
28	0,0311244	0,0269897	0,0232932	0,0200130	0,0171225	0,0145926
29	0,0298950	0,0257784	0,0221147	0,0188799	0,0160455	0,0135796
30	0,0287481	0,0246499	0,0210193	0,0178301	0,0150514	0,0126489
31	0,0276757	0,0235963	0,0199989	0,0168554	0,0141321	0,0117922
32	0,0266709	0,0226106	0,0190466	0,0159486	0,0132804	0,0110023
33	0,0257274	0,0216865	0,0181561	0,0151036	0,0124900	0,0102729
34	0,0248400	0,0208187	0,0173220	0,0143148	0,0117554	0,0095984
35	0,0240037	0,0200022	0,0165393	0,0135773	0,0110717	0,0089739
36	0,0232143	0,0192329	0,0158038	0,0128869	0,0104345	0,0083948
37	0,0224680	0,0185068	0,0151116	0,0122396	0,0098398	0,0078574
38	0,0217615	0,0178206	0,0144593	0,0116319	0,0092842	0,0073581
39	0,0210916	0,0171711	0,0138439	0,0110608	0,0087646	0,0068938
40	0,0204556	0,0165557	0,0132624	0,0105235	0,0082782	0,0064615
41	0,0198510	0,0159719	0,0127124	0,0100174	0,0078223	0,0060589
42	0,0192756	0,0154173	0,0121917	0,0095402	0,0073947	0,0056834
43	0,0187274	0,0148899	0,0116981	0,0090899	0,0069933	0,0053331
44	0,0182044	0,0143879	0,0112298	0,0086645	0,0066163	0,0050061
45	0,0177050	0,0139096	0,0107852	0,0082625	0,0062617	0,0047005
46	0,0172277	0,0134534	0,0103625	0,0078820	0,0059282	0,0044149
47	0,0167711	0,0130179	0,0099605	0,0075219	0,0056142	0,0041477
48	0,0163338	0,0126018	0,0095778	0,0071806	0,0053184	0,0038977
49	0,0159147	0,0122040	0,0092131	0,0068571	0,0050396	0,0036636
50	0,0155127	0,0118232	0,0088655	0,0065502	0,0047767	0,0034443

Πίνακας 6 *Μέρος 1ο*

$P_{\overline{n}\mid i} = \dfrac{1}{S_{\overline{n}\mid i}}$ **Χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας, που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου**						
	0,07	**0,08**	**0,09**	**0,1**	**0,11**	**0,12**
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	0,4830918	0,4807692	0,4784689	0,4761905	0,4739336	0,4716981
3	0,3110517	0,3080335	0,3050548	0,3021148	0,2992131	0,2963490
4	0,2252281	0,2219208	0,2186687	0,2154708	0,2123264	0,2092344
5	0,1738907	0,1704565	0,1670925	0,1637975	0,1605703	0,1574097
6	0,1397958	0,1363154	0,1329198	0,1296074	0,1263766	0,1232257
7	0,1155532	0,1120724	0,1086905	0,1054055	0,1022153	0,0991177
8	0,0974678	0,0940148	0,0906744	0,0874440	0,0843211	0,0813028
9	0,0834865	0,0800797	0,0767988	0,0736405	0,0706017	0,0676789
10	0,0723775	0,0690295	0,0658201	0,0627454	0,0598014	0,0569842
11	0,0633569	0,0600763	0,0569467	0,0539631	0,0511210	0,0484154
12	0,0559020	0,0526950	0,0496507	0,0467633	0,0440273	0,0414368
13	0,0496508	0,0465218	0,0435666	0,0407785	0,0381510	0,0356772
14	0,0443449	0,0412969	0,0384332	0,0357462	0,0332282	0,0308712
15	0,0397946	0,0368295	0,0340589	0,0314738	0,0290652	0,0268242
16	0,0358576	0,0329769	0,0302999	0,0278166	0,0255167	0,0233900
17	0,0324252	0,0296294	0,0270462	0,0246641	0,0224715	0,0204567
18	0,0294126	0,0267021	0,0242123	0,0219302	0,0198429	0,0179373
19	0,0267530	0,0241276	0,0217304	0,0195469	0,0175625	0,0157630
20	0,0243929	0,0218522	0,0195465	0,0174596	0,0155756	0,0138788
21	0,0222890	0,0198323	0,0176166	0,0156244	0,0138379	0,0122401
22	0,0204058	0,0180321	0,0159050	0,0140051	0,0123131	0,0108105
23	0,0187139	0,0164222	0,0143819	0,0125718	0,0109712	0,0095600
24	0,0171890	0,0149780	0,0130226	0,0112998	0,0097872	0,0084634
25	0,0158105	0,0136788	0,0118063	0,0101681	0,0087402	0,0075000
26	0,0145610	0,0125071	0,0107154	0,0091590	0,0078126	0,0066519
27	0,0134257	0,0114481	0,0097349	0,0082576	0,0069892	0,0059041
28	0,0123919	0,0104889	0,0088520	0,0074510	0,0062571	0,0052439
29	0,0114487	0,0096185	0,0080557	0,0067281	0,0056055	0,0046602
30	0,0105864	0,0088274	0,0073364	0,0060792	0,0050246	0,0041437
31	0,0097969	0,0081073	0,0066856	0,0054962	0,0045063	0,0036861
32	0,0090729	0,0074508	0,0060962	0,0049717	0,0040433	0,0032803
33	0,0084081	0,0068516	0,0055617	0,0044994	0,0036294	0,0029203
34	0,0077967	0,0063041	0,0050766	0,0040737	0,0032591	0,0026006
35	0,0072340	0,0058033	0,0046358	0,0036897	0,0029275	0,0023166
36	0,0067153	0,0053447	0,0042350	0,0033431	0,0026304	0,0020641
37	0,0062368	0,0049244	0,0038703	0,0030299	0,0023642	0,0018396
38	0,0057951	0,0045389	0,0035382	0,0027469	0,0021254	0,0016398
39	0,0053868	0,0041851	0,0032356	0,0024910	0,0019111	0,0014620
40	0,0050091	0,0038602	0,0029596	0,0022594	0,0017187	0,0013036
41	0,0046596	0,0035615	0,0027079	0,0020498	0,0015460	0,0011626
42	0,0043359	0,0032868	0,0024781	0,0018600	0,0013909	0,0010370
43	0,0040359	0,0030341	0,0022684	0,0016880	0,0012515	0,0009250
44	0,0037577	0,0028015	0,0020767	0,0015322	0,0011262	0,0008252
45	0,0034996	0,0025873	0,0019017	0,0013910	0,0010135	0,0007363
46	0,0032600	0,0023899	0,0017416	0,0012630	0,0009123	0,0006569
47	0,0030374	0,0022080	0,0015952	0,0011468	0,0008212	0,0005862
48	0,0028307	0,0020403	0,0014614	0,0010415	0,0007393	0,0005231
49	0,0026385	0,0018856	0,0013389	0,0009459	0,0006656	0,0004669
50	0,0024598	0,0017429	0,0012269	0,0008592	0,0005992	0,0004167

Πίνακας 6 *Μέρος 2ο*