Επιχειρησιακή έρευνα (ασκήσεις)

ΤΕΙ Ηπείρου (Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής)
Γκόγκος Χρήστος
(06-01-2015)

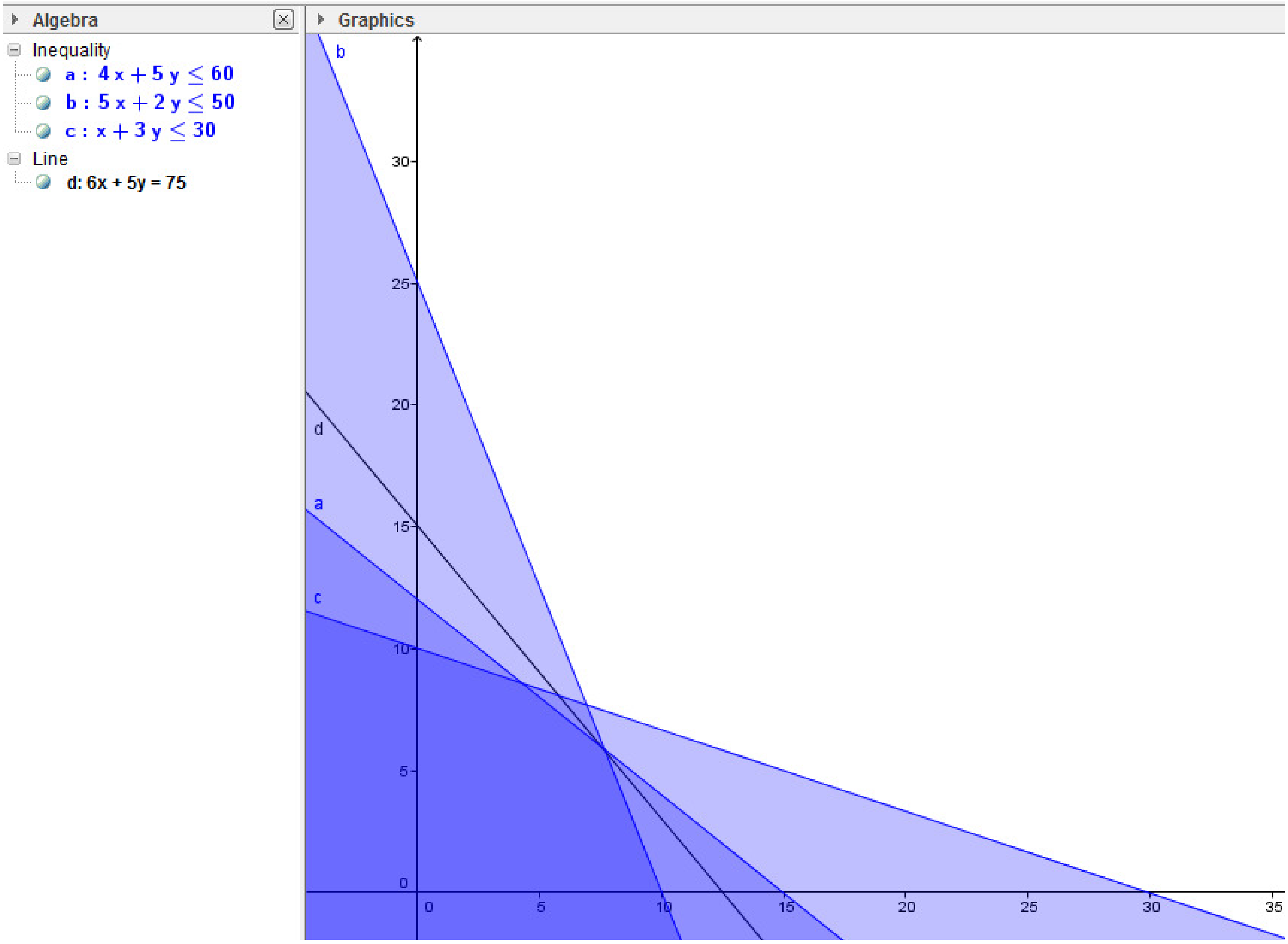
1. Γραφική επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

Α) Με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου επιλύστε το πρόβλημα:

Μεγιστοποίηση	6x + 5y
Υπό τους περιορισμούς	4x + 5y <= 60
	5x + 2y <= 50
	x + 3y <= 30

Τι θα συμβεί αν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει 5x + 2y;

Λύση:



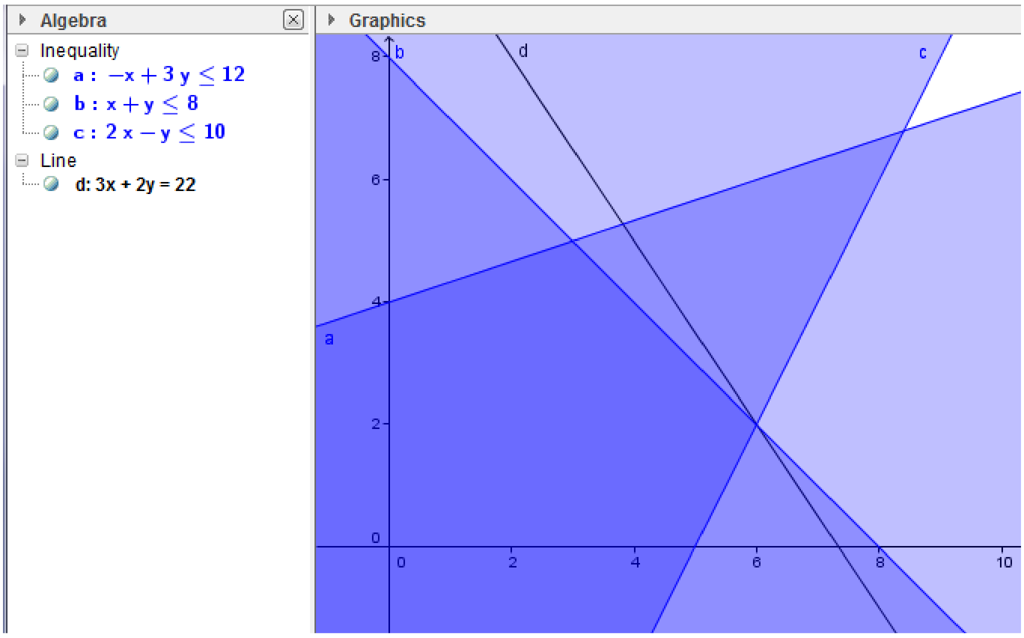
Αν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει 5x + 2y τότε η συνάρτηση κόστους θα επιτυγχάνει τη βέλτιστη λύση σε οποιοδήποτε σημείο της πλευράς του πολυγώνου της εφικτής περιοχής που αντιστοιχεί στον περιορισμό 5x+2y<=50.

B) Με τη βοήθεια της γραφικής μεθόδου επιλύστε το πρόβλημα:

Μεγιστοποίηση $3x + 2y$

Υπό τους περιορισμούς
$-x + 3y <= 12$
$x + y <= 8$
$2x - y <= 10$
$x, y >= 0$

Λύση:



2. Διατύπωση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού

A) Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα. Κάθε προϊόν προκειμένου να παραχθεί απαιτεί επεξεργασία σε διάφορα στάδια και απασχολεί μηχανήματα και εργαζόμενους της επιχείρησης για κάποια λεπτά. Οι χρόνοι αυτοί (σε λεπτά) καθώς και το μοναδιαίο κέρδος (σε ευρώ) για το κάθε προϊόν συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Προϊόν	Στάδιο 1	Στάδιο 2	Στάδιο 3	Κέρδος ανά μονάδα
A	20	12	16	5
B	10	40	20	8

Με δεδομένο ότι σε κάθε στάδιο επεξεργασίας μπορούν ημερήσια να διατεθούν 8 ώρες, να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Λύση:

max $5x + 8y$

s.t. $20x + 10y <= 480$
$12x + 40y <= 480$
$16x + 20y <= 480$
$x, y >= 0$

B) Ένας επενδυτής επιθυμεί να επενδύσει 5000 ευρώ σε 2 τύπους επενδύσεων: την επένδυση A που αποδίδει 5% και την επένδυση B που αποδίδει 8%. Η έρευνα αγοράς συνιστά κατανομή τουλάχιστον 25% στην A και το πολύ 50% στην B. Επιπλέον η επένδυση στην A θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με το ήμισυ της επένδυσης Β. Διατυπώστε το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα διαμοιραστεί το κεφάλαιο στις επενδύσεις.

Λύση:

max 0.05*x + 0.08*y s.t. x + y = 5000 x >= 1250 y <= 2500 x >= y *0.5 y >= 0	max 0.05*x + 0.08*y s.t. x + y <= 5000 0.75x – 0.25y >= 0 0.5x – 0.5y >= 0 x – 0.5y >= 0 x, y >= 0

3. Επίλυση προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex

Α) Να επιλυθεί το ακόλουθο πρόβλημα με τη μέθοδο Simplex

max 60x1 + 30x2 + 20x3
s.t. 8x1 + 6x2 + x3 <= 48
4x1 + 2x2 + 1.5x3 <= 20
2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 <= 8
x2 <= 5
x1, x2,x3 >= 0

Λύση:

Το πρόβλημα αρχικά μετατρέπεται σε κανονική μορφή

max 60x1 + 30x2 + 20x3
s.t. 8x1 + 6x2 + x3 + s1 = 48
4x1 + 2x2 + 1.5x3 + s2 = 20
2x1 + 1.5x2 + 0.5x3 + s3 = 8
x2 +s4 = 5
x1, x2,x3,s1,s2,s3,s4 >= 0

Πίνακας 1

Cj		60	30	20	0	0	0	0	
	BV	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Ποσότητα
0	s1	8	6	1	1	0	0	0	48
0	s2	4	2	1,5	0	1	0	0	20
0	s3	2	1,5	0,5,	0	1	0	0	20
0	s4	0	1	0	0	0	0	1	5
	zj	0	0	0	0	0	0	0	0
	cj-zj	60	30	20	0	0	0	0	

Η μεταβλητή εισόδου είναι η x1 διότι έχει τον υψηλότερο συντελεστή στη γραμμή Cj-Zj (60)
Εξετάζονται οι υποψήφιες μεταβλητές εξόδου:

s1 ➔ 48/8 =6
s2 ➔ 20/4=5
s3 ➔ 8/2=4
s4 ➔ χωρίς όριο

Επιλέγεται ως μεταβλητή εξόδου η s3 διότι έχει την χαμηλότερη τιμή (4).

Πίνακας 2

Cj		60	30	20	0	0	0	0	
	BV	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Ποσότητα
0	s1	0	0	-1	1	0	-4	0	16
0	s2	0	-1	0,5	0	1	-2	0	4
60	x1	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4
0	s4	0	1	0	0	0	0	1	5
	zj	60	45	15	0	0	30	0	240
	cj-zj	0	-15	5	0	0	-30	0	

Η μεταβλητή εισόδου είναι η x3 διότι έχει τον υψηλότερο συντελεστή στη γραμμή Cj-Zj (5)
Εξετάζονται οι υποψήφιες μεταβλητές εξόδου:
s1 ➔ χωρίς όριο
s2 ➔ 4/1=4
x1 ➔ 4/0,5=8
s4 ➔ χωρίς όριο
Επιλέγεται ως μεταβλητή εξόδου η s2 διότι έχει την χαμηλότερη τιμή (4).

Πίνακας 3

Cj		60	30	20	0	0	0	0	
	BV	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Ποσότητα
0	s1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
20	x3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
60	x1	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	2
0	s4	0	1	0	0	0	0	1	5
	zj	60	35	20	0	10	10	0	280
	cj-zj	0	-5	0	0	-10	-10	0	

Ο πίνακας είναι τελικός διότι δεν υπάρχει τιμή στη γραμμή Cj-Zj που να είναι θετική.

Β) Ερώτημα 18 σελ. 136 (Επιχειρησιακή Έρευνα – εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση Π. Υψηλάντης)
Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματσιμού
max 8x1 + 4x2 +12x3 – x4
s.t. x1 + 2x2 +x3 +5x4 <=150
x2 -4x3 +8x4 = 70
6x1 +7x2+2x3-x4 >=120
x1,x2,x3,x4 >=0
α) Μετατρέψτε τους περιορισμούς σε ισότητες προσθέτοντας τις κατάλληλες μεταβλητές περιθωρίου και τεχνητές μεταβλητές.
β) Δημιουργήστε τον αρχικό πίνακα Simplex.

Λύση:
α) Προσθήκη μεταβλητών περιθωρίου και τεχνητών μεταβλητών και μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες
max 8x1 + 4x2 +12x3 – x4 +0s1 +MA1 +0s2 +MA2
s.t. x1 + 2x2 +x3 +5x4 + s1 = 150
x2 -4x3 +8x4 + A1 = 70
6x1 +7x2+2x3-x4 –s2 + A2=120
x1,x2,x3,x4 >=0

β) Αρχικός πίνακας Simplex

		8	4	12	-1	0	0	M	M	
	BV	x1	x2	x3	x4	s1	s2	A1	A2	RHS
0	s1	1	2	1	5	1	0	0	0	150
M	A1	0	1	-4	8	0	0	1	0	70
M	A2	6	7	2	-1	0	-1	0	1	120
	Zj	6M	8M	-2M	7M	0	-M	M	M	
	Cj-Zj	8-6M	4-8M	12+2M	-1-7M	0	M	0	0	

4. Ανάλυση ευαισθησίας

Α) Μια επιχείρηση κατασκευάζει 4 προϊόντα. Η κατασκευή των προϊόντων απαιτεί 3 στάδια: συναρμολόγηση, βάψιμο και συσκευασία. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος και οι χρόνοι που απαιτούνται σε λεπτά για την παραγωγή του δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Προϊόν	Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Συσκευασία	Κέρδος
1	2	3	2	1,5
2	4	2	3	2,5
3	3	3	2	3,0
4	7	4	5	4,5

Η επιχείρηση διαθέτει 100000 λεπτά για συναρμολόγηση, 50000 λεπτά για βάψιμο και 60000 λεπτά για συσκευασία. (http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens_solver.html)

	A	B	C	D	E	F
1		Παραγωγή	Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Συσκευασία	Κέρδος
2	Προϊόν 1	0	2	3	2	1,50 €
3	Προϊόν 2	0	4	2	3	2,50 €
4	Προϊόν 3	0	3	3	2	3,00 €
5	Προϊόν 4	0	7	4	5	4,50 €
6						
7	Απαιτούμενος χρόνος		0	0	0	
8	Διαθέσιμος χρόνος		100000	50000	60000	
9						
10	Συνολικό κέρδος					
11	0					
12						
13						
14						
15	http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens_solver.html					

	A	B	C	D	E	F
1		Παραγωγή	Συναρμολόγηση	Βάψιμο	Συσκευασία	Κέρδος
2	Προϊόν 1	0	2	3	2	1,50 €
3	Προϊόν 2	16000	4	2	3	2,50 €
4	Προϊόν 3	6000	3	3	2	3,00 €
5	Προϊόν 4	0	7	4	5	4,50 €
6						
7	Απαιτούμενος χρόνος		82000	50000	60000	
8	Διαθέσιμος χρόνος		100000	50000	60000	
9						
10	Συνολικό κέρδος					
11	58000					
12						
13						
14						
15	http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens_solver.html					

Αναφορά απάντησης

Κελί προορισμού (Μέγιστο)

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$A$11	Συνολικό κέρδος	0	58000

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$B$2	Προϊόν 1 Παραγωγή	0	0
$B$3	Προϊόν 2 Παραγωγή	0	16000
$B$4	Προϊόν 3 Παραγωγή	0	6000
$B$5	Προϊόν 4 Παραγωγή	0	0

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Απόκλιση
$C$7	Απαιτούμενος χρόνος Συναρμολόγηση	82000	$C$7<=$C$8	Μη υποχρεωτικός	18000
$D$7	Απαιτούμενος χρόνος Βάψιμο	50000	$D$7<=$D$8	Υποχρεωτικός	0
$E$7	Απαιτούμενος χρόνος Συσκευασία	60000	$E$7<=$E$8	Υποχρεωτικός	0

Αναφορά ευαισθησίας

Ρυθμιζόμενα κελιά

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Μειωμένο κόστος	Αντικειμενικός συντελεστής	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$B$2	Προϊόν 1 Παραγωγή	0	-1,5	1,5	1,5	1E+30
$B$3	Προϊόν 2 Παραγωγή	16000	0	2,5	2	0,142857143
$B$4	Προϊόν 3 Παραγωγή	6000	0	3	0,75	0,5
$B$5	Προϊόν 4 Παραγωγή	0	-0,2	4,5	0,2	1E+30

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελική τιμή	Σκιώδης τιμή	Περιορισμός R.H. Side	Επιτρεπόμενη αύξηση	Επιτρεπόμενη μείωση
$C$7	Απαιτούμενος χρόνος Συναρμολόγηση	82000	0	100000	1E+30	18000
$D$7	Απαιτούμενος χρόνος Βάψιμο	50000	0,8	50000	40000	10000
$E$7	Απαιτούμενος χρόνος Συσκευασία	60000	0,3	60000	15000	26666,66667

1. Περιγράψτε τη λύση που βρίσκει ο Solver του Excel.
2. Ποιοι από τους περιορισμούς είναι δεσμευτικοί και ποιοι είναι μη δεσμευτικοί;
3. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλλαγής των συντελεστών της συνάρτησης κόστους;
4. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αναγκαστικής εισαγωγής στη λύση του προβλήματος μεταβλητών που έχουν στην τρέχουσα λύση την τιμή μηδέν;
5. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της αλλαγής των ποσοτήτων των περιορισμών;
6. Αν είχατε 100 επιπλέον λεπτά σε ποια εργασία θα τις διαθέτατε και γιατί; Ποια θα ήταν η τιμή της συνάρτησης κόστους τότε;
7. Αν έπρεπε να αφαιρέσετε 50 λεπτά από ποια εργασία θα τις αφαιρούσατε και γιατί; Ποια θα ήταν η τιμή της συνάρτησης κόστους τότε;

Λύση:

1. Η λύση παρουσιάζει κέρδος 58000 ευρώ και προτείνει την παραγωγή 0 τεμαχίων προϊόντος 1, 16000 τεμαχίων προϊόντος 2, 6000 τεμαχίων προϊόντος 3 και 0 τεμαχίων προϊόντος 4. Περισσέυουν 18000 λεπτά στη συναρμολόγηση ενώ γίνεται πλήρης χρήση του διαθέσιμου χρόνου στο βάψιμο και στη συσκευασία
2. Δύο από τους περιορισμούς είναι δεσμευτικοί (το βάψιμο και η συσκευασία) ενώ η συναρμολόγηση είναι μη δεσμευτικός περιορισμός.
3. Αλλαγή συντελεστών αντικειμενικής συνάρτησης:

a. Αν ο συντελεστής του προιόντος 1 που είναι 1,5 αυξηθεί κατά 1,5 ή περισσότερο τότε η ποσότητα παραγωγής του προϊόντος 1 θα γίνει βασική μεταβλητή και θα εισέλθει στη λύση.
b. Ο συντελεστής του προιόντος 2 στη συνάρτηση κόστους που είναι 2,5 μπορεί να αυξηθεί κατά 1,5 ή να μειωθεί κατά 0,142857 και η λύση να παραμείνει η ίδια.
c. Ο συντελεστής του προϊόντος 3 στη συνάρτηση κόστους που είναι 3,0 μπορεί να αυξηθεί κατά 0,75 ή να μειωθεί κατά 0,5 και η λύση να παραμείνει η ίδια.
d. Αν ο συντελεστής του προιόντος 4 που είναι 4,5 αυξηθεί κατά 0,2 ή περισσότερο τότε η ποσότητα παραγωγής του προϊόντος 4 θα γίνει βασική μεταβλητή και θα εισέλθει στη λύση.

4. Αν παραχθεί υποχρεωτικά 1 μονάδα προϊόντος 1 θα μειωθεί το κέρδος κατά 1,5, ενώ αν αν παραχθεί υποχρεωτικά 1 μονάδα προϊόντος 4 θα μειωθεί το κέρδος κατά 0,2.
5. Η σκιώδης τιμή δείχνει πόσο θα αλλάζει η τιμή της συνάρτησης κόστους για κάθε μονάδα μεταβολής της ποσότητας του αντίστοιχου περιορισμού εφόσον η αλλαγή κυμαίνεται μέσα στα όρια που καθορίζονται από τις στήλες «Επιτρεπόμενη αύξηση» και «Επιτρεπόμενη μείωση».
    a. Εφόσον τα διαθέσιμα λεπτά συναρμολόγησης είναι από 82000 μέχρι +∞ η τιμή της συνάρτησης κόστους δεν αλλάζει.
    b. Για κάθε λεπτό που μεταβάλλεται ο διαθέσιμος χρόνος βαψίματος, στο διάστημα 40000 έως 90000, η συνάρτηση κόστους μεταβάλεται κατά 0,8.
    c. Για κάθε λεπτό που μεταβάλλεται ο διαθέσιμος χρόνος συσκευασίας, στο διάστημα 33333,33 έως 75000, η συνάρτηση κόστους μεταβάλεται κατά 0,3.
6. Τα 100 επιπλέον λεπτά πρέπει να διατεθούν στο βάψιμο καθώς έχει την υψηλότερη σκιώδη τιμή. Η συνάρτηση κόστους σε αυτή την περίπτωση θα λάβει την τιμή 58080.
7. Τα 50 λεπτά θα πρέπει να αφαιρεθούν από τη συναρμολόγηση καθώς εκεί υπάρχει διαθέσιμος χρόνος που δεν αξιοποιείται.

Β) Ερώτημα 16 σελ. 136 (Επιχειρησιακή Έρευνα – εφαρμογές στη σημερινή επιχείρηση Π. Υψηλάντης)
Δίνεται ο παρακάτω τελικός πίνακας Simplex

		1000	3000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bj
1000	x1	1	4	2	0	160
0	s2	0	6	-7	1	200
	Zj	1000	4000	2000	0	1600
	Cj – Zj	0	-1000	-2000	0	

α. Για ποιες τιμές των συντελεστών κέρδους η προηγούμενη λύση παραμένει βέλτιστη;
Β. Πόσο μπορούν να αυξομειωθούν οι αρχικές ποσότητες των περιορισμών έτσι ώστε να ισχύει ο παραπάνω πίνακας Simplex;

Λύση:
α) Αν ο συντελεστής κέρδους του x1 μεταβληθεί κατά Δ δηλαδή γίνει 1000 + Δ τότε ο πίνακας γίνεται

		1000+Δ	3000	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bj
1000+Δ	x1	1	4	2	0	160
0	s2	0	6	-7	1	200
	Zj	1000+Δ	4000+4Δ	2000 + 2Δ	0	1600+160Δ
	Cj – Zj	0	-1000 -4Δ	-2000 - 2Δ	0	

Οι ποσότητες -1000 -4Δ και -2000 - 2Δ θα πρέπει να είναι <=0 έτσι ώστε η υπάρχουσα λύση να παραμείνει η βέλτιστη. Άρα -250<=Δ<=1000 και συνεπώς ο συντελεστής κέρδους της x1 μπορεί να κυμανθεί από 750 έως 2000.

Αν ο συντελεστής κέρδους του x2 μεταβληθεί κατά Δ δηλαδή γίνει 3000 + Δ τότε ο πίνακας γίνεται

		1000	3000+Δ	0	0	Ποσότητα
	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bj
1000	x1	1	4	2	0	160
0	s2	0	6	-7	1	200
	Zj	1000	4000	2000	0	1600
	Cj – Zj	0	-1000 + Δ	-2000	0	

Η ποσότητα -1000 + Δ θα πρέπει να είναι <=0 έτσι ώστε η υπάρχουσα λύση να παραμείνει η βέλτιστη. Άρα Δ<=1000 και συνεπώς ο συντελεστής κέρδους της x2 μπορεί να έχει ως ανώτατο όριο την τιμή 4000.

β) Αν αυξηθεί η s1 κατά θ μονάδες θα πρέπει να μειωθεί η x1 κατά 2θ μονάδες και η s2 να αυξηθεί κατά 7θ μονάδες. Θα πρέπει για την x1 να είναι 160 - 2θ >=0 και για την s2 να είναι 200+7θ>=0, άρα 28,57<=θ<=80

5. Δυικό πρόβλημα

Α) Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα και ζητείται η εύρεση του δυικού προβλήματος.

min 50x1 + 20x2 +30x3
s.t. 2x1 + 3x2 + 4x3 >= 11
12x1 + 13x2 +14x3 <= 111
x1 + x2 + x3 = 1
x1, x2, x3 >= 0

Λύση:

min 50x1 + 20x2 +30x3
s.t. 2x1 + 3x2 + 4x3 >= 11
-12x1 - 13x2 -14x3 >= -111
x1 + x2 + x3 = 1
x1, x2, x3 >= 0

max 11w1 -111w2 + w3
s.t. 2w1 -12w2 + w3 <= 50
3w1 -12w2 + w3 <= 20
4w1-14w2+w3 <=30
w1, w2 >=0 w3 free

6. Ειδικά προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού

Α) Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα μεταφοράς. Μια επιχείρηση διαθέτει 3 εργοστάσια από τα οποία θα διαθέσει το προϊόν της σε 3 πόλεις. Η παραγωγή των εργοστασίων (Ε1, Ε2 και Ε3) είναι 20000, 30000 και 50000 τεμάχια. Η ζήτηση στις πόλεις Π1, Π2 και Π3 για το προϊόν είναι 15000, 40000 και 45000 τεμάχια. Στον ακόλουθο πίνακα καταγράφεται το κόστος μεταφοράς ανά 100 τεμάχια από κάθε εργοστάσιο προς κάθε πόλη.

	Π1	Π2	Π3
Ε1	3	2	1
Ε2	5	5	4
Ε3	2	6	3

Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Λύση:

x11 = ποσότητα που θα μεταφερθεί από το εργοστάσιο Ε1 στην πόλη Π1
x12 = ποσότητα που θα μεταφερθεί από το εργοστάσιο Ε1 στην πόλη Π2
κ.ο.κ.

min 3x11 + 2x12 + x13 + 5x21 + 5x22 + 4x23 + 2x31 + 6x32 + 3x33
s.t. x11 + x21 + x31 = 150
x12 + x22 + x32 = 400
x13 + x23 + x33 = 450
x11 + x12 + x13 = 200
x21 + x22 + x23 = 300
x31 + x32 + x33 = 500
x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33 >= 0

Β) Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα ανάθεσης. Μια επιχείρηση διαθέτει 4 εργαζόμενους τους οποίους επιθυμεί να αναθέσει σε 4 εργασίες. Κάθε εργαζόμενος θα πρέπει να ανατεθεί σε μια μόνο εργασία και κάθε εργασία θα πρέπει να ανατεθεί σε ένα μόνο εργαζόμενο. Τα κόστη ανάθεσης των εργαζόμενων στις εργασίες δίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

	Εργασία 1	Εργασία 2	Εργασία 3	Εργασία 4
Εργαζόμενος 1	1	2	3	4
Εργαζόμενος 2	2	4	5	4
Εργαζόμενος 3	3	6	3	2
Εργαζόμενος 4	4	8	7	1

Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού.

Λύση:

x11 = δυαδική μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή 1 αν ο εργαζόμενος 1 ανατεθεί στην εργασία 1, αλλιώς λαμβάνει την τιμή 0.
x12 = δυαδική μεταβλητή που λαμβάνει την τιμή 1 αν ο εργαζόμενος 1 ανατεθεί στην εργασία 2, αλλιώς λαμβάνει την τιμή 0.
κ.ο.κ.

min x11+2x12+3x13+4x14+2x21+4x22+5x23+4x24+3x31+6x32+3x33+2x34+4x41+8x42+7x43+x44
s.t. x11 +x12+x13+x14=1
x21+x22+x23+x24=1
x31+x32+x33+x34=1
x41+x42+x43+x44=1
x11+x21+x31+x41=1
x12+x22+x32+x42=1
x13+x23+x33+x43=1
x14+x24+x34+x44=1
x11,x12,x13,x14,x21,x22,x23,x24,x31,x32,x33,x34,x14,x24,x34,x44 ∊ {0,1}