ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

(Βιβλιογραφία. 1) Στατιστική για τις επιχειρήσεις και την οικονομία, Πέτρος και Απόστολος Κιόχος Αθήνα 2010 κεφάλαιο 22

2) Στατιστική με SPSS κ. Ζαφειρόπουλου-Ν. Μυλωνά Εκδόσεις Τζιολα κεφάλαιο 8)

Α)Έλεγχοι μέσου (T-test, Z-test, ANOVA Μηδενική υπόθεση η ισότητα των μέσων)

Β)Έλεγχοι αναλογίας

Γ)Έλεγχοι διακύμανσης

Δ)Έλεγχος χ^2 ανεξαρτησίας (Μηδενική υπόθεση η ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών)

Ε) Έλεγχος κανονικότητας Kolmogorov-Smirnov (Μηδενική υπόθεση η κανονικότητα της τυχαίας μεταβλητής)

Ζ) T-test , F-test στο γραμμικό μοντέλο. (Μηδενική υπόθεση τα βήτα ίσα με μηδέν, δηλ. μη-ύπαρξη γραμμικής σχέσης)

Η ονομασία υπόθεση μηδέν οφείλεται στο γεγονός ότι συνήθως (όχι όμως πάντοτε) η υπόθεση μηδέν δηλώνει ότι η διαφορά μεταξύ $\boldsymbol{\theta}$ και $\boldsymbol{\theta_0}$ είναι μηδενική.

Σε κάθε μηδενική υπόθεση αντιστοιχεί και μια άλλη υπόθεση, που ονομάζεται *εναλλακτική υπόθεση* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{H_1}$. Η απόρριψη της υπόθεσης $\boldsymbol{H_0}$ συνεπάγεται την αποδοχή της $\boldsymbol{H_1}$ και αντίστροφα.

Στην υπόθεση $\boldsymbol{H_0}$, συνήθως, θέτουμε την πρόταση ότι η τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ ισούται με μια ορισμένη τιμή $\boldsymbol{\theta_0}$, δηλαδή:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Π.χ. ένα εργοστάσιο ισχυρίζεται ότι η μέση διάρκεια ζωής των ηλεκτρικών του λαμπτήρων είναι 1.200 ώρες, δηλαδή H_0 : μ = 1.200 ώρες. Στη συνέχεια θέτουμε την εναλλακτική υπόθεση H_1, που μπορεί να έχει τις εξής μορφές:

(α) $H_1 : \theta \neq \theta_0$, που σημαίνει ότι η τιμή της παραμέτρου του πληθυσμού είναι διαφορετική από τη γνωστή τιμή θ_0, είτε μικρότερη, είτε μεγαλύτερη, και ο έλεγχος αυτός λέγεται *δίπλευρος*.

(β) $H_1 : \theta < \theta_0$ ή $H_1 : \theta > \theta_0$. Ο έλεγχος στην περίπτωση αυτή ονομάζεται *μονόπλευρος*.

Είναι δυνατόν η στατιστική υπόθεση H_0 να έχει και τη μορφή:

1) $\theta = \theta_0$,

2) $\theta \geq \theta_0$ και

3) $\theta \leq \theta_0$.

Οι εναλλακτικές υποθέσεις H_1 που αντιστοιχούν αντίστοιχα στις τρεις παραπάνω μηδενικές υποθέσεις είναι:

1) $\theta \neq \theta_0$,

2) $\theta < \theta_0$ και

3) $\theta > \theta_0$.

Η εκάστοτε μορφή της κατάλληλης μηδενικής $\boldsymbol{H_0}$ και της εναλλακτικής υπόθεσης $\boldsymbol{H_1}$ εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος.

Η μαθηματική διατύπωση του ελέγχου υποθέσεων έχει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, \theta)$.

Η άγνωστη παράμετρος $\boldsymbol{\theta}$ του πληθυσμού έστω ότι έχει πεδίο ορισμού το $\boldsymbol{\Theta}$. Το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$ ονομάζεται συνήθως *παραμετρικός χώρος*. Π.χ. ο παραμετρικός χώρος του μέσου $\boldsymbol{\mu}$ ενός κανονικού πληθυσμού είναι το διάστημα $(-\infty,\infty)$, ενώ ο παραμετρικός χώρος της παραμέτρου $\boldsymbol{p}$ μιας διωνυμικής κατανομής θα είναι (0, 1). Από τον παραπάνω πληθυσμό $x \sim f(x, \theta)$ παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2,..., X_n$. Από το δείγμα αυτό παίρνουμε μια εκτίμηση $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ της παραμέτρου $\boldsymbol{\theta}$, δηλαδή:

$$\hat{\theta} = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_\eta)$$

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της τιμής $\hat{\theta}$ χρειάζεται να αποφασίσουμε αν η παράμετρος θ του πληθυσμού ανήκει στο υποσύνολο Θ_0 ή στο υποσύνολο Θ_1, όπου Θ_0 και Θ_1 είναι δύο υποσύνολα του Θ (παραμετρικού χώρου) και είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing \quad \text{και} \quad \Theta_0 + \Theta_1 = \Theta$$

που σημαίνει ότι η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.

Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η παράμετρος του πληθυσμού θ ανήκει στο υποσύνολο Θ_0 ή στο υποσύνολο Θ_1, κάνουμε μια υπόθεση και με τη βοήθεια ενός κριτηρίου συμπεραίνουμε αν πρέπει να γίνει δεκτή η υπόθεση αυτή ή να απορριφθεί.

Την υπόθεση που κάνουμε, ότι η παράμετρος θ ανήκει στο υποσύνολο Θ_0, την καλούμε υπόθεση μηδέν και, όπως είπαμε, τη συμβολίζουμε με H_0, ενώ την αντίθετη προς αυτή υπόθεση τη λέμε εναλλακτική υπόθεση και τη συμβολίζουμε με H_1.

Επομένως, μια στατιστική υπόθεση μπορούμε να τη συμβολίζουμε ως εξής:

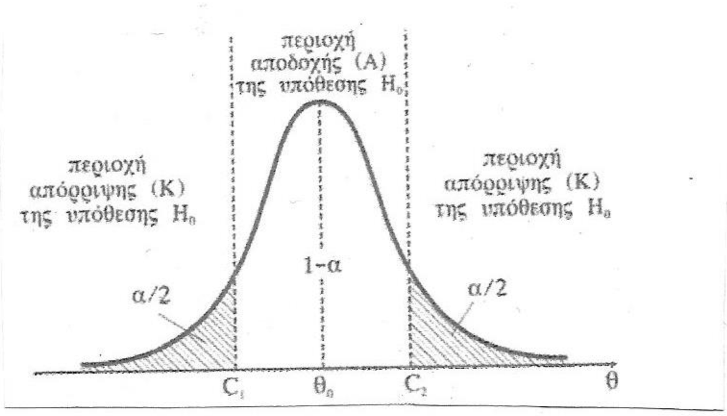
$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

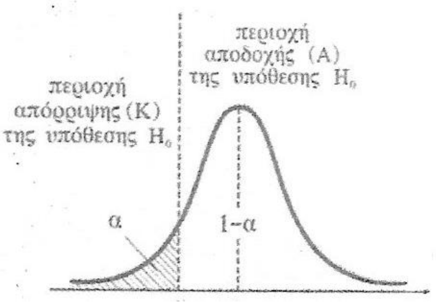
Αν το υποσύνολο Θ_0 ή Θ_1 αποτελείται από ένα μόνο σημείο, τότε την υπόθεση H_0 ή H_1 τη λέμε *απλή*, διαφορετικά την ονομάζουμε *σύνθετη*. Π.χ.

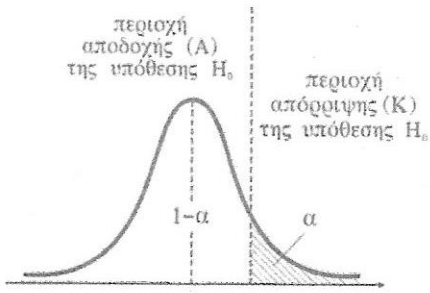
$H_0 : \theta = \theta_0$	(απλή)
$H_1 : \theta > \theta_0$	(σύνθετη)
$H_0 : \theta \geq \theta_0$	(σύνθετη)
$H_1 : \theta \leq \theta_0$	(σύνθετη)

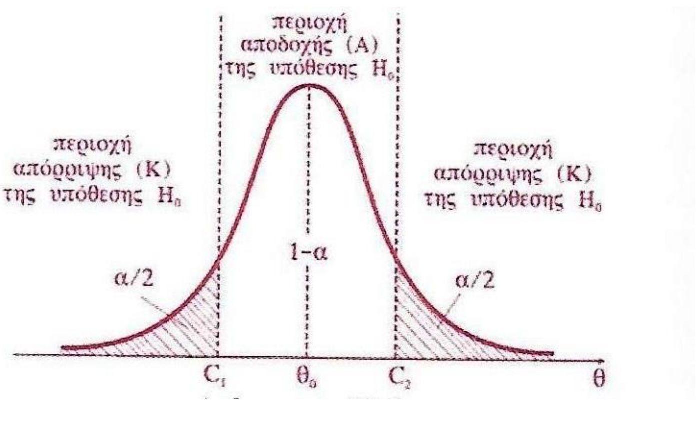
Από την παραπάνω ανάλυση παρατηρούμε ότι ο έλεγχος μιας στατιστικής υπόθεσης είναι μια διαδικασία που διαιρεί το δειγματικο χώρο Ω (όπου δειγματικός χώρος είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων μιας δειγματοληψίας) σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A και K και με τρόπο ώστε, αν συμβαίνει η εκτίμηση $\hat{\theta}$ που προκύπτει από το δείγμα να ανήκει στο $K(\hat{\theta} \in A)$, απορρίπτουμε την υπόθεση H_0, ενώ αν το $\hat{\theta}$ ανήκει στο $A(\hat{\theta} \in A)$, δεχόμαστε την υπόθεση H_0.

Το υποσύνολο K το λέμε *περιοχή απόρριψης* ή *κρίσιμη περιοχή*, ενώ το υποσύνολο A το λέμε *περιοχή αποδοχής*.


περιοχή
αποδοχής (A)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
$1-\alpha$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
C_1
θ_0
C_2
θ


περιοχή
αποδοχής (A)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
α
$1-\alpha$


περιοχή
αποδοχής (A)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
$1-\alpha$
α


περιοχή
αποδοχής (A)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
περιοχή
απόρριψης (K)
της υπόθεσης H_0
$1-\alpha$
$\alpha/2$
$\alpha/2$
C_1
θ_0
C_2
θ

. ΕΙΔΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Κατά τον έλεγχο μιας στατιστικής υπόθεσης είναι δυνατό να γίνουν, όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα, δύο ειδών σφάλματα.

α) Σφάλμα πρώτου είδους

Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε όταν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 στην περίπτωση που αυτή είναι αληθινή.

Την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα του πρώτου είδους τη συμβολίζουμε ως εξής:

$\alpha = P$ {απορρίπτουμε την H_0, ενώ η H_0 είναι η ορθή}

Την πιθανότητα α να απορρίψουμε εσφαλμένα μια υπόθεση H_0 την ονομάζουμε *επίπεδο σημαντικότητας*

β) Σφάλμα δεύτερου είδους

Ονομάζεται το σφάλμα που κάνουμε, όταν δεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση H_0 στην περίπτωση που αυτή δεν είναι αληθινή.

Την πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα του δεύτερου είδους τη συμβολίζουμε ως εξής:

$\beta = P$ {δεχόμαστε την H_0, ενώ η H_1 είναι η ορθή} ή

$\beta = P$ {αποδοχή της H_0/ H_0 εσφαλμένη}

Δηλαδή η πιθανότητα β είναι ο κίνδυνος να κάνουμε αποδεκτή την εσφαλμένη υπόθεση H_0. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παίρνουμε λανθασμένη απόφαση.

Τα δυνατά αποτελέσματα ενός ελέγχου υποθέσεων μπορούμε να τα συνοψίσουμε όπως φαίνονται στο πίνακα

Πίνακας

Απόφαση	Υπόθεση	
	H_0 Αληθινή	H_0 Εσφαλμένη
Αποδοχή H_0	Ορθή απόφαση	Σφάλμα δεύτερου είδους Πιθανότητα β
Απόρριψη H_0	Σφάλμα πρώτου είδους Πιθανότητα α	Ορθή απόφαση

Εκτός από τις παραπάνω πιθανότητες $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ μπορούμε να υπολογίσουμε και την πιθανότητα να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση $\boldsymbol{H_0}$, όταν αυτή είναι πράγματι εσφαλμένη. Η πιθανότητα αυτή ονομάζεται δύναμη ή ισχύ του στατιστικού ελέγχου.

Η δύναμη του στατιστικού ελέγχου συμβολίζεται ως εξής:

$$\gamma = 1 - \beta = P\ \{\text{Απορρίπτουμε την } H_0\text{, γιατί η } H_1 \text{ είναι η ορθή}\} = $$
$$= P\ \{\text{απόρριψη της } H_0 / H_0 \text{ εσφαλμένη}\}$$

Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της ισχύος του ελέγχου, τόσο πιο σωστή θα είναι η απόφασή μας.

Στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων επιδιώκεται η σχετική ελαχιστοποίηση του α και η σχετική μεγιστοποίηση της δύναμης γ.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω εννοιών και ειδικά του σφάλματος πρώτου και δευτέρου είδους, αναφέρουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

8.2 Τιμή p ενός ελέγχου

Αποδεικνύεται ότι:

Αν η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε μια στάθμη σημαντικότητας a_1, τότε απορρίπτεται και σε κάθε στάθμη σημαντικότητας a μεγαλύτερη της a_1 ($a > a_1$).
Επίσης, αν η H_0 δεν απορρίπτεται σε μια στάθμη σημαντικότητας a_2 τότε δεν απορρίπτεται και σε κάθε στάθμη σημαντικότητας a μικρότερη της a_2 ($a < a_2$).

Στην προηγούμενη ανάλυση η στάθμη σημαντικότητας ενός ελέγχου μιας υπόθεσης ήταν προκαθορισμένη. Σε πολλές, όμως, περιπτώσεις δεν είναι δεδομένη η στάθμη σημαντικότητας, αλλά ζητείται να βρεθεί η μικρότερη στάθμη σημαντικότητας a_1 στην οποία η H_0 απορρίπτεται (δηλαδή η H_0 απορρίπτεται σε κάθε στάθμη σημαντικότητας a μεγαλύτερη της a_1 ($a > a_1$) και δεν απορρίπτεται σε κάθε στάθμη σημαντικότητας a μικρότερη της a_1 ($a < a_1$)). Στην προσέγγιση αυτή, που λέγεται προσέγγιση πιθανότητας-τιμής ή πιο απλά προσέγγιση τιμής p, υπολογίζουμε την τιμή p του ελέγχου, δηλαδή τη μικρότερη στάθμη σημαντικότητας στην οποία η H_0 απορρίπτεται.

Ορισμός 8.5 *Ονομάζουμε **τιμή p** (p-value) ενός ελέγχου μιας μηδενικής υπόθεσης H_0 από ένα δεδομένο δείγμα τη μικρότερη στάθμη σημαντικότητας στην οποία η H_0 απορρίπτεται από το δείγμα αυτό.*

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει η επόμενη πρόταση, που είναι πολύ χρήσιμη στους ελέγχους υποθέσεων.

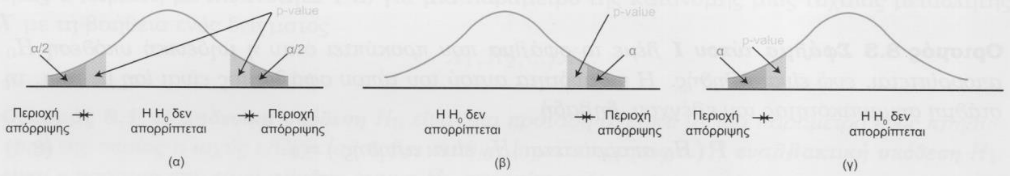
Πρόταση *Αν η τιμή p του ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης H_0 με εναλλακτική την H_1 σε στάθμη σημαντικότητας α είναι μεγαλύτερη της στάθμης σημαντικότητας του ελέγχου, δηλαδή αν*

τιμή p> α,

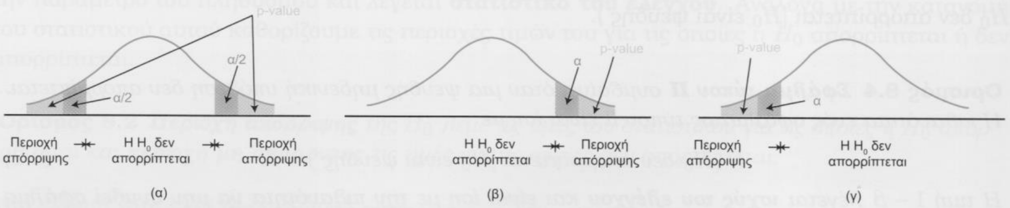
τότε η H_0 δεν απορρίπτεται (βλ. Σχήμα), ενώ αν είναι μικρότερη,

τιμή p< α,

τότε η H_0 απορρίπτεται (βλ. Σχήμα).



Σχήμα *p-value> α, η H_0 δεν απορρίπτεται για έλεγχο: α) δίπλευρο, β) μονόπλευρο από δεξιά, γ) μονόπλευρο από αριστερά*



Σχήμα *p-value< α, η H_0 απορρίπτεται για έλεγχο: α) δίπλευρο, β) μονόπλευρο από δεξιά, β) μονόπλευρο από αριστερά*

Από την πρόταση αυτή προκύπτει η παρακάτω παρατήρηση, με την οποία γίνεται ο έλεγχος μίας υπόθεσης στο SPSS.

Παρατήρηση *Ο έλεγχος ισχύος της μηδενικής υπόθεσης H_0 με εναλλακτική την H_1 σε στάθμη σημαντικότητας α μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της αντίστοιχης τιμής p ως εξής:*

- *Υπολογίζουμε τη δειγματική τιμή του στατιστικού U_0*
- *Υπολογίζουμε την τιμή p του ελέγχου.*
- *Αν τιμή p> α,*

τότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε την H_0, αφού η τιμή p είναι η μικρότερη στάθμη σημαντικότητας στην οποία η H_0 απορρίπτεται.

- *Αν τιμή p < α,*

τότε η H_0, απορρίπτεται, οπότε ισχύει η εναλλακτική υπόθεση H_1.

Κανονική κατανομή, γνωστή τυπική απόκλιση

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με ελέγχους υποθέσεων για τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση σ.

Στην περίπτωση αυτή, για να ελέγξουμε την υπόθεση ότι η μέση τιμή μ μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μ_0,

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

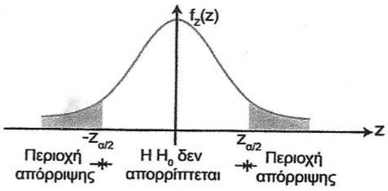
με τη βοήθεια ενός δείγματος μεγέθους n, χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \tag{8.3}$$

το οποίο εκφράζει την απόσταση της δειγματικής μέσης τιμής $\overline{X}$ από την τιμή μ_0 και ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή, οπότε η περιοχή απόρριψης της H_0, σε έναν δίπλευρο έλεγχο σε στάθμη σημαντικότητας a, είναι οι παρατηρούμενες τιμές του Z με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της z_c (κρίσιμη τιμή του ελέγχου), δηλαδή της τιμής για την οποία η πιθανότητα η $|Z|$ είναι μεγαλύτερη της z_c είναι a,

$$P(|Z| > z_c) = a.$$

Επειδή το στατιστικό Z ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή, $z_c = z_{a/2}$, όπου $z_{a/2}$ οι τιμές για τις οποίες (βλ. (4.48)) $P\left(|Z| > z_{a/2}\right) = a$. Επομένως, η περιοχή απόρριψης είναι οι τιμές z του στατιστικού Z για τις οποίες ισχύει $|z| > z_{a/2}$, δηλαδή οι γραμμοσκιασμένες περιοχές στα άκρα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής (βλ. Σχήμα 8.8).



Σχήμα *Δίπλευρος έλεγχος σε στάθμη σημαντικότητας a για τη μέση τιμή κανονικής κατανομής με γνωστή τυπική απόκλιση*

Πρόταση *Η μηδενική υπόθεση*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

με εναλλακτική την $\quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

(δίπλευρος έλεγχος)*, όπου μ η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X, που ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση σ, απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας a, αν η δειγματική τιμή του στατιστικού*

Πρόταση *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η*

$$H_1: \ \mu < \mu_0$$

*(**μονόπλευρος έλεγχος** απο αριστερά), τότε η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$z < -z_a$$

όπου
$$z_a = \Phi^{-1}(1-a)$$

και Φ^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Πίνακας ***Έλεγχοι για μέση τιμή με γνωστή τυπική απόκλιση** σ*

H_0	H_1	Περιοχή απόρριψης της H_0
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X \neq \mu_0$	$\lvert z\rvert = \left\lvert \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right\rvert > z_{a/2}$
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X > \mu_0$	$z > z_a$
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X < \mu_0$	$z < -z_a$

Σύμφωνα με τον ορισμό της p–τιμής και την Ενότητα 8.2, η τιμή p ενός δίπλευρου έλεγχου για τη μέση τιμή μ μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση σ είναι

$$\text{p-value} = P(|X| > \overline{x}) = P(|Z| > z),$$

όπου Z το στατιστικό (8.3) και $z = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ η παρατηρούμενη τιμή του στο δείγμα.
Επίσης, σύμφωνα με την (4.44),

$$P(|Z| > z) = 2\left[1-\Phi(z)\right], \quad \text{αν } z > 0$$

ή

$$P(|Z| > |z|) = 2\Phi(z) = 2\left[1-\Phi(|z|)\right], \quad \text{αν } z < 0,$$

όπου $\Phi(z)$ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Πρόταση *Η **τιμή p του δίπλευρου έλεγχου** της υπόθεσης*

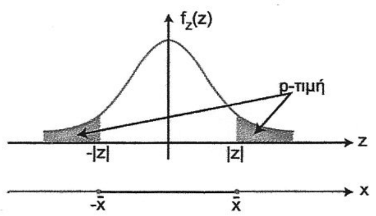
$$H_0: \ \mu = \mu_0$$

με εναλλακτική την
$$H_1: \ \mu \neq \mu_0,$$

όπου μ η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση σ από ένα δείγμα μεγέθους n, είναι

$$\textit{p-value} = P(|X| > \overline{x}) = P(|Z| > |z|) = 2\left[1-\Phi(|z|)\right]$$

όπου $\overline{x}$ η δειγματική μέση τιμή και $z = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.3).



Σχήμα *Η τιμή p δίπλευρου έλεγχου για τη μέση τιμή κανονικής μεταβλητής*

Παράδειγμα *Αν το βάρος X των αγοριών ηλικίας 18 ετών της χώρας ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 6,7\,kg$. να ελεγχθεί σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha = 0,05$ αν η μέση τιμή του X είναι $63,1kg$, με τη βοήθεια του παρακάτω δείγματος*

Βάρος (σε Kg)									
70,8	70,4	59,6	55,4	65,4	55,4	53,7	56,0	68,7	64,9
63,4	49,7	63,3	61,0	68,5	61,7	61,2	63,7	53,9	68,6
56,1	60,5	63,3	60,1	68,6	53,1	71,5	59,7	61,4	71,5

QR p8.1: Αρχείο δεδομένων παραδείγματος

qr.tziola.gr/IC2fm http://

Λύση

Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση (η μέση τιμή μ του βάρους X των αγοριών είναι $63,1kg$)

$$H_0: \mu = 63,1kg$$

με εναλλακτική την

$$H_1: \mu \neq 63,1kg,$$

οπότε ο έλεγχος είναι δίπλευρος. Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν η μέση τιμή μ είναι $63,1kg$ ή όχι.

Επειδή το βάρος ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση χρησιμοποιούμε το στατιστικό (8.3)

$$Z = \frac{\overline{X} - 63,1}{6,7/\sqrt{30}}, \qquad (i)$$

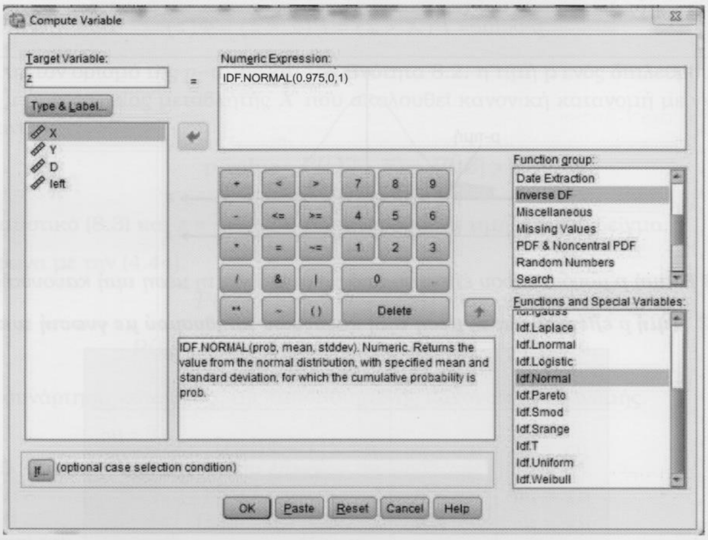
το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή με περιοχή απόρριψης της H_0

$$|z| > z_{0,05/2}.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την τιμή του (βλ. Ενότητα 4.4.4)

$$z_{0,05/2} = z_{0,025} = \Phi^{-1}(1 - 0,025) = \Phi^{-1}(0,975)$$

με τη βοήθεια της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής Φ^{-1} της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, η οποία στο SPSS προκύπτει ως εξής:



Σχήμα *Εύρεση τιμής αντίστροφης συνάρτησης κατανομής στο παράθυρο Compute Variable*

Επιλέγουμε από το μενού του Data Editor διαδοχικά:

Transform → Compute Variable

οπότε εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος στο οποίο επιλέγουμε:

- Στο πλαίσιο Function group την επιλογή Inverse DF.
- Στο πλαίσιο Functions and Special Variables την επιλογή Idf.Normal.
- Κάνουμε κλικ στο βελάκι.

Έτσι στο πάνω πλαίσιο του παραθύρου εμφανίζεται

IDF.NORMAL(?,?,?)

- Εισάγουμε τις τιμές $0,975 = 1 - 0,025$ (για $a/2 = 0,05/2 = 0,025$), 0 (μέση τιμή) και 1 (τυπική απόκλιση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής).
- Εισάγουμε z στο πεδίο Target Variable.
- Κάνουμε κλικ στο OK.

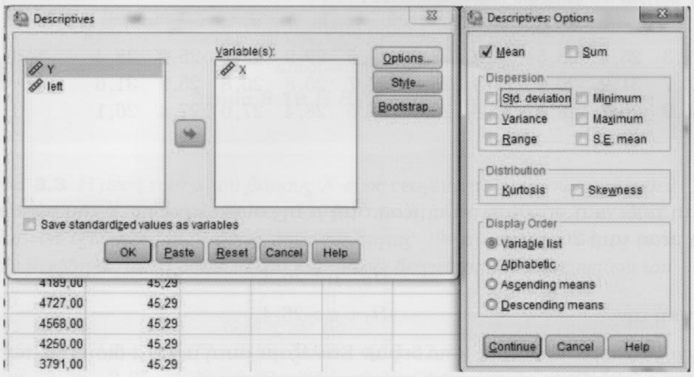
Έτσι, δημιουργείται μία στήλη (μεταβλητή) της οποίας όλα τα κελιά έχουν τιμή

$$z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96.$$

- Στη συνέχεια, επιλέγοντας από το μενού του Data Editor

Analyze $\rightarrow$ Descriptive Statistics $\rightarrow$ Descriptives

εμφανίζεται το παράθυρο "Descriptives" στο οποίο σέρνουμε τη μεταβλητή X από το αριστερό στο δεξιό πλαίσιο και στη συνέχεια επιλέγοντας Options εμφανίζεται ένα μικρότερο παράθυρο, στο οποίο επιλέγουμε μόνο τη μέση τιμή (Mean) όπως στο Σχήμα



Σχήμα *Παράθυρο "Descriptives"*

Κάνοντας κλικ στο Continue και μετά στο OK στο πρώτο παράθυρο, εμφανίζεται το αποτέλεσμα (Mean) στον Viewer (Σχήμα)

Descriptive Statistics

	N	Mean
X	30	62,037
Valid N (listwise)	30	

Σχήμα *Ο πίνακας αποτελεσμάτων του Descriptives στον Viewer*

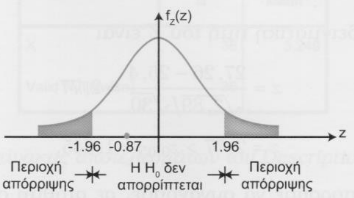
Από την (i) προκύπτει ότι η παρατηρούμενη τιμή του στατιστικού Z για το συγκεκριμένο δείγμα είναι

$$z = \frac{62,04 - 63,1}{6,7/\sqrt{30}} = -0,87.$$

Άρα, $$|z| = 0,87 < z_{0,05/2} = 1,96,$$

οπότε η H_0 δεν απορρίπτεται.

Επομένως δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό, σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$, ότι το μέσο βάρος των αγοριών 18 ετών όλης της χώρας είναι $63,1kg$.



Σχήμα *Η H_0 δεν απορρίπτεται.*

Παράδειγμα *Η συγκέντρωση ενός ρύπου X (σε mgr/m^3) σε μια πόλη ακολουθεί κανονική κατανομή με διακύμανση $\sigma^2 = 2,89$. Τον προηγούμενο χρόνο η μέση τιμή της συγκέντρωσης ήταν 26,4. Μπορούμε να συνάγουμε σε στάθμη σημαντικότητας 5% ότι η μέση τιμή της συγκέντρωσης του ρύπου αυξήθηκε φέτος από το παρακάτω δείγμα 30 φετινών παρατηρήσεων;*

QR p8.2: Αρχείο δεδομένων παραδείγματος
qr.tziola.gr/BQZIT http://

Συγκέντρωση ρύπου (σε mgr/m^3)									
27,3	25,4	28,5	25,9	28,0	29,6	29,9	28,6	25,2	28,4
24,7	31,2	26,9	24,8	26,9	27,7	25,8	26,8	25,2	31,6
25,9	26,2	28,7	24,8	26,9	27,5	28,4	27,6	27,4	26,1

Λύση

Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση ότι η μέση τιμή μ της συγκέντρωσης X του ρύπου είναι ίση με την περσινή μέση τιμή 26,4

$$H_0: \ \mu = 26,4,$$

με εναλλακτική την

$$H_1: \ \mu > 26,4,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος (από δεξιά). Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν η μέση τιμή μ αυξήθηκε σε σχέση με την περσινή τιμή της.

Επειδή η συγκέντρωση X ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση, χρησιμοποιούμε το στατιστικό (8.3)

$$Z = \frac{\overline{X} - 26,4}{\sqrt{2,89}/\sqrt{30}}, \qquad (i)$$

το οποίο ακολουθεί κανονική κατανομή με περιοχή απόρριψης της H_0 την

$$z > z_{0,05}.$$

Με τον τρόπο του προηγούμενου παραδείγματος προκύπτει ότι

$$z_{0,05} = 1,645.$$

Εκτελώντας τις εντολές

Analyze → Descriptive Statistics → Descriptives

προκύπτει ο πίνακας του Σχήματος 8.18

Descriptive Statistics

	N	Mean
X	30	27,263
Valid N (listwise)	30	

Σχήμα *Ο πίνακας αποτελεσμάτων του Descriptives στον Viewer*

Από την (i) προκύπτει ότι η δειγματική τιμή του Z είναι

$$z = \frac{27,26 - 26,4}{\sqrt{2,89}/\sqrt{30}} = 2,77.$$

Επειδή

$$z = 2,77 > z_{0,05} = 1,645,$$

η H_0 απορρίπτεται, οπότε μπορούμε να συνάγουμε, σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$, ότι η συγκέντρωση του ρύπου αυξήθηκε φέτος.

Κανονική κατανομή, άγνωστη τυπική απόκλιση, μικρό δείγμα

Σε πολλές περιπτώσεις το δείγμα που χρησιμοποιείται στον έλεγχο μιας υπόθεσης, για διάφορους πρακτικούς λόγους, είναι μικρό ($n < 30$). Για παράδειγμα για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου ανά $100km$ για ένα νέο μοντέλο αυτοκινήτου η εταιρεία κατασκευής του προτιμάει να χρησιμοποιεί μικρά δείγματα, διότι τα αυτοκίνητα του δείγματος πωλούνται ως μεταχειρισμένα.

Στην ενότητα αυτή, ασχολούμαστε με ελέγχους υποθέσεων για τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με άγνωστη τυπική απόκλιση με τη βοήθεια μικρών δειγμάτων.

Για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι η μέση τιμή μ μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής X είναι μ_0,

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$

με τη βοήθεια ενός μικρού δείγματος μεγέθους n χρησιμοποιούμε, όπως και για την εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης ( ), το στατιστικό

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \tag{8.5}$$

όπου S η δειγματική τυπική απόκλιση, το οποίο εκφράζει την απόσταση της δειγματικής μέσης τιμής $\overline{X}$ από την τιμή μ_0 και ακολουθεί κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Η περιοχή απόρριψης της H_0 σε έναν δίπλευρο έλεγχο σε στάθμη σημαντικότητας a είναι οι δειγματικές τιμές t του στατιστικού ελέγχου T που είναι απολύτως μεγαλύτερες της κρίσιμης τιμής t_c του T, δηλαδή

$$P\left(|t| > t_c\right) = a.$$

Επειδή το T ακολουθεί κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας,

$$t_c = t_{n-1;a/2},$$

όπου

$$t_{n-1;a/2} = F_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

οι τιμές της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής F_{n-1}^{-1} της κατανομής Τ με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, οπότε η περιοχή απόρριψης είναι οι τιμές t του στατιστικού T για τις οποίες ισχύει $|t| > t_{n-1;a/2}$, δηλαδή οι γραμμοσκιασμένες περιοχές στα άκρα της κατανομής t του Σχήματος 8.35.

Πρόταση *Η μηδενική υπόθεση*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

***(δίπλευρος έλεγχος)**, όπου μ η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, που ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη τυπική απόκλιση, απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας a, αν η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.5)*

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

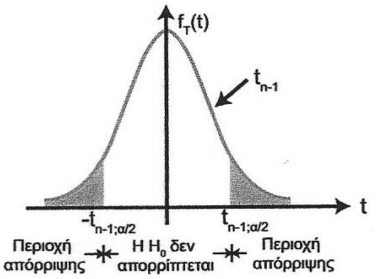
*όπου $\overline{x}$ και s η δειγματική τυπική απόκλιση για ένα **μικρό δείγμα** μεγέθους n, βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης*

$$|t| > t_{n-1;a/2},$$

όπου

$$t_{n-1;a/2} = F_{n-1}^{-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$$

η αντίστοιχη τιμή της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής F_{n-1}^{-1} της κατανομής Τ με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα *Δίπλευρος έλεγχος για μέση τιμή από μικρό δείγμα*

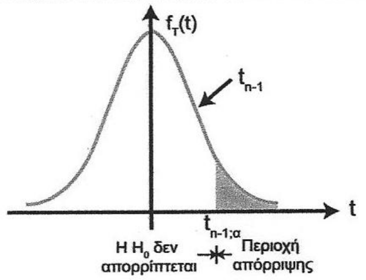
▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι*

$$H_1: \ \mu > \mu_0$$

μονόπλευρος έλεγχος *από δεξιά) τότε η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$t > t_{n-1;a},$$

που t η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.5) και $t_{n-1;a} = F_{n-1}^{-1}(1-a)$ η αντίστοιχη τιμή της ιντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής T με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.



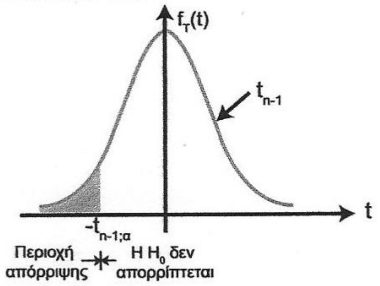
Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από δεξιά για μέση τιμή από μικρό δείγμα*

▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι*

$$H_1: \ \mu < \mu_0$$

μονόπλευρος έλεγχος *από αριστερά) τότε η περιοχή απόρριψης είναι*

$$t < -t_{n-1;a},$$



Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από αριστερά για μέση τιμή από μικρό δείγμα*

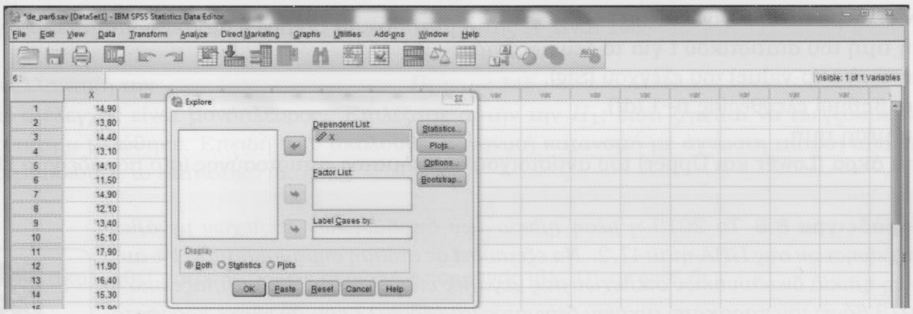
Πίνακας ***Τιμή p ελέγχου από μικρό δείγμα για τη μέση τιμή κανονικής κατανομής με άγνωστη διασπορά***

H_0	H_1	τιμή p
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X \neq \mu_0$	$p = 2\left[1 - F_{n-1}(\lvert t\rvert)\right], \;\; t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X > \mu_0$	$p = 1 - F_{n-1}(t)$
$\mu_X = \mu_0$	$\mu_X < \mu_0$	$p = F_{n-1}(t)$

Εύρεση στο SPSS

Για να κάνουμε στο SPSS ελέγχους υποθέσεων για τη μέση τιμή ενός κανονικού πληθυσμού με τη βοήθεια ενός μικρού δείγματος, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Εισάγουμε τα δεδομένα σε μία μεταβλητή του Data Editor (έστω X)
- Ελέγχουμε την κανονικότητά τους (βλ. Ενότητα 5.111) όπως στο Σχήμα



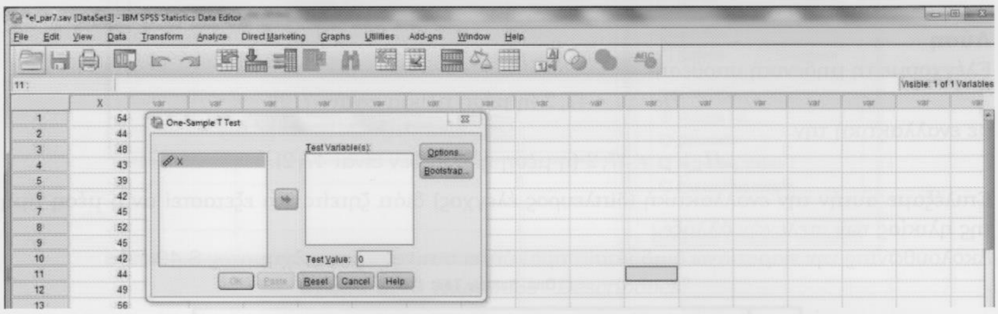
Σχήμα *Παράθυρο "Explore" για έλεγχο κανονικότητας*

- Στη συνέχεια, επιλέγοντας από το μενού του Data Editor (βλ. Ενότητα 7.1.3)

Analyze → Compare Means → One Sample T-Test

εμφανίζεται το παράθυρο "One Sample t-test" του Σχήματος

- Σέρνουμε τη μεταβλητή στην οποία αποθηκεύσαμε τις τιμές από το αριστερό στο δεξί πλαίσιο του παραθύρου.



Σχήμα *Παράθυρο "One Sample T-Test"*

- Κάνοντας κλικ στο Continue και μετά στο OK του πρώτου παραθύρου, εμφανίζονται στον Viewer οι πίνακες του Σχήματος

Στον πρώτο πίνακα (One-Sample Statistics) δίνονται:

- ο αριθμός των παρατηρήσεων (N),
- η μέση τιμή τους (Mean),
- και η τυπική απόκλιση (Std. Deviation).

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
μετρήσεις1	5	29,80	5,263	2,354

One-Sample Test

	Test Value = 0					
					98% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
μετρήσεις1	12,661	4	,000	29,800	20,98	38,62

Σχήμα *Αποτελέσματα One Sample T-Test στον Viewer*

Στον δεύτερο πίνακα δίνονται:

- η τιμή του στατιστικού t για το δείγμα αυτό,
- η τιμή p (p-value) του ελέγχου (Sig),
- οι βαθμοί ελευθερίας n−1 (df),
- η μέση τιμή,
- τα άκρα (Lower και Upper) του αντίστοιχου διαστήματος εμπιστοσύνης (στο παράδειγμα 98%).

Παράδειγμα *Το 2013 η μέση ηλικία των διευθυντικών στελεχών μεγάλων επιχειρήσεων στις ΗΠΑ ήταν 47,2. Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 1% αν η μέση ηλικία διευθυντικών στελεχών στις μεγάλες εταιρείες των ΗΠΑ άλλαξε από το 2013 βάσει του παρακάτω τυχαίου δείγματος μεγέθους 22 που ληφθηκε πρόσφατα.*

Ηλικία (σε έτη)										
54	44	48	43	39	42	45	52	45	42	44
49	56	47	42	45	49	53	47	51	49	45

Θεωρούμε ότι η μέση ηλικία διευθυντικών στελεχών στις μεγάλες εταιρείες ακολουθεί κανονική κατανομή.

QR 8.8p: Λήψη αρχείου δεδομένων

qr.tziola.gr/yIL5A http://

Λύση

Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0: \ \mu = 47,2 \text{ (η μέση ηλικία είναι } 47,2)$$

με εναλλακτική την

$$H_1: \ \mu \neq 47,2 \text{ (η μέση ηλικία δεν είναι } 47,2).$$

Επιλέξαμε αυτήν την εναλλακτική (δίπλευρος έλεγχος) διότι ζητείται να εξεταστεί αν η μέση τιμή της ηλικίας των στελεχών άλλαξε.

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ο πίνακας του Σχήματος 8.42.

One -Sample Test

	Test Value = 0					
					99% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
X	49,550	21	,000	46,79500	44,1210	49,4690

Σχήμα *Αποτελέσματα One Sample T-Test στον Viewer για το Παράδειγμα*

Επειδή η τιμή p του ελέγχου (Sig= 0.00) είναι μικρότερη της στάθμης σημαντικότητας του ελέγχου $a = 0,01$, η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$ (αλλά και σε στάθμη σημαντικότητας), οπότε μπορούμε να συνάγουμε από το δείγμα αυτό, σε στάθμη σημαντικότητας 1%, ότι η μέση ηλικία των διευθυντικών στελεχών άλλαξε από το 2013.

Παράδειγμα *Ο μέσος χρόνος μεταξύ δύο επισκευών των φωτοτυπικών μηχανημάτων που χρησιμοποιούνται στα σχολεία μιας πόλης πέρυσι ήταν 145 μέρες χρήσης. Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 5% αν ο χρόνος μεταξύ δύο επισκευών ενός μηχανήματος μειώθηκε φέτος σε σχέση με πέρυσι με τη βοήθεια του παρακάτω δείγματος των χρόνων X μεταξύ δύο επισκευών 24 τέτοιων μηχανημάτων.*

Ημέρες μεταξύ δύο επισκευών											
137	109	134	127	167	118	138	138	130	145	138	138
149	131	118	135	159	161	131	129	146	145	119	147

QR a8.9: Αρχείο δεδομένων άσκησης

qr.tziola.gr/FpXpJ http://

Θεωρούμε ότι ο χρόνος μεταξύ δύο επισκευών ενός μηχανήματος ακολουθεί κανονική κατανομή.

Λύση

Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση ότι η μέση τιμή μ της X είναι 145

$$H_0: \ \mu = 145$$

με εναλλακτική την

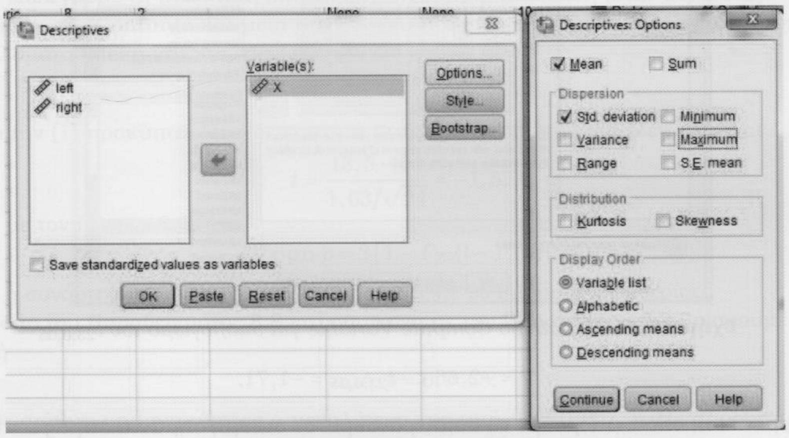
$$H_1: \ \mu < 145,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτήν την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν η μέση τιμή μ μειώθηκε. Επειδή η X ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη τυπική απόκλιση χρησιμοποιούμε το στατιστικό (8.5)

$$T = \frac{\overline{X} - 145}{S/\sqrt{24}}, \qquad (i)$$

το οποίο ακολουθεί κατανομή t, με περιοχή απόρριψης (βλ. Πίνακας)

$$t < -t_{24-1;0,05}.$$



Σχήμα *Παράθυρο "Descriptives"*

Επιλέγοντας από το μενού του Data Editor διαδοχικά:

Analyze → Descriptive Statistics → Descriptives

εμφανίζεται το παράθυρο "Descriptives" στο οποίο σέρνουμε τη μεταβλητή X από το αριστερό στο δεξιό πλαίσιο και στη συνέχεια επιλέγοντας Options εμφανίζεται ένα μικρότερο παράθυρο, στο οποίο επιλέγουμε τη μέση τιμή (Mean) και την τυπική απόκλιση (Std. deviation) (Σχήμα 8.42). Κάνουμε κλικ στο Continue και μετά στο OK του πρώτου παραθύρου, εμφανίζονται στον Viewer τα αποτελέσματα (Mean και Std. deviation)

$$\overline{x} = 137,42 \quad \text{και} \quad s = 14,00.$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε από το μενού του Data Editor διαδοχικά:

Transform → Compute Variable

οπότε εμφανίζεται το παράθυρο Compute Variable του Σχήματος στο οποίο επιλέγουμε:

- στο πλαίσιο Function group, την επιλογή Inverse DF
- στο πλαίσιο Functions and Special Variables, την επιλογή Idf.T και
- κάνουμε κλικ στο βελάκι

οπότε στο πεδίο Numeric Expression του παραθύρου εμφανίζεται

$$\text{IDF.T(?,?)}$$

- Εισάγουμε τις τιμές $0,95$ (για $a = 0,05$) και 23 (βαθμοί ελευθερίας της κατανομής T)

$$\text{IDF.T}(0.95, 23)$$

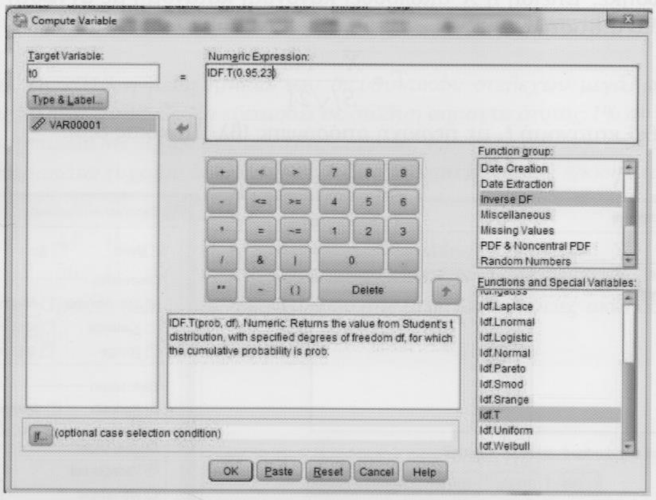
- Εισάγουμε, επίσης στο πάνω αριστερά πλαίσιο το όνομα της μεταβλητής στην οποία θα εκχωρηθεί το αποτέλεσμα (εδώ t0).
- Κάνουμε κλικ στο OK.

Έτσι, εμφανίζεται στο παράθυρο του Data Editor μία μεταβλητή (στήλη) t0 με όλες τις τιμές της ίσες με

$$t_0 = t_{23;0,05} = 1,71.$$

Έτσι, η δειγματική τιμή του T για το δείγμα αυτό προκύπτει από την (i)

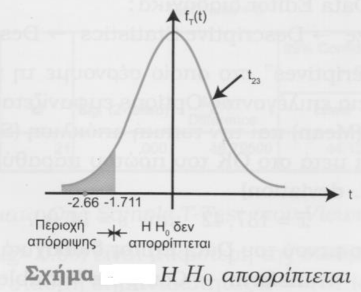
$$t = \frac{137,42 - 145}{14/\sqrt{24}} = -2,66.$$



Σχήμα *Παράθυρο Compute Variable για υπολογισμό του $t_{23;0,05}$*

Επειδή
$$t = -2,66 < -t_{23;0,05} = -1,71,$$

η H_0 απορρίπτεται, οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε, σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,05$, ότι ο χρόνος μεταξύ δύο επισκευών ενός μηχανήματος μειώθηκε φέτος σε σχέση με πέρυσι.



Σχήμα *Η H_0 απορρίπτεται*

Έλεγχοι υποθέσεων για αναλογία

Σε πολλές περιπτώσεις θέλουμε να κάνουμε έναν έλεγχο υπόθεσης σχετικά με την αναλογία των ατόμων που έχουν ένα χαρακτηριστικό σε έναν πληθυσμό.

Παραδείγματα

▸ Μια εταιρεία ισχυρίζεται ότι το 8,5% των ανδρών της χώρας χρησιμοποιεί το after shave που παράγει και κάποιος θέλει να εξετάσει αν ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο δείγμα αντρικού πληθυσμού.

▸ Μια ταχυδρομική εταιρεία ισχυρίζεται ότι το 90% των γραμμάτων ή πακέτων παραδίδονται στους παραλήπτες το πολύ σε 24 ώρες. Κάποιος θέλει να ελέγξει τον ισχυρισμό αυτό με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τους ελέγχους για την αναλογία p ενός χαρακτηριστικού σε έναν πληθυσμό με τη βοήθεια μεγάλων δειγμάτων, οι οποίοι είναι όμοιοι με τους ελέγχους υποθέσεων για μέσες τιμές.

Όπως και στα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης (βλ. Ενότητα 7.3), για τους ελέγχους αυτούς χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$Z = \frac{(Y/n) - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}, \tag{8.11}$$

όπου Y ο αριθμός των ατόμων του δείγματος που έχουν το χαρακτηριστικό αυτό, το οποίο ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$, οπότε:

Πρόταση *Η μηδενική υπόθεση*

$$H_0 : p = p_0$$

με εναλλακτική την $H_1 : p \neq p_0$,

*(**δίπλευρος έλεγχος**), όπου p η αναλογία ενός χαρακτηριστικού σε έναν πληθυσμό, απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας a αν η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.11)*

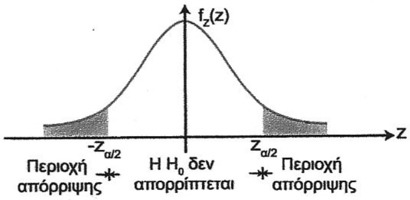
$$z = \frac{(y/n) - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}},$$

όπου y ο αριθμός των ατόμων του συγκεκριμένου δείγματος που έχουν το χαρακτηριστικό για ένα μεγάλο δείγμα μεγέθους n ($n > 30$), βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης της H_0.

$$|z| > z_{a/2},$$

όπου $z_{a/2} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{a}{2}\right)$

και Φ^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.



Σχήμα *Δίπλευρος έλεγχος για αναλογία*

▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η*

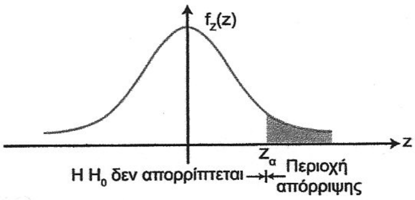
$$H_1 : p > p_0$$

*(**μονόπλευρος έλεγχος** από δεξιά), τότε η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$z > z_a,$$

όπου

$$z_a = \Phi^{-1}(1-a).$$



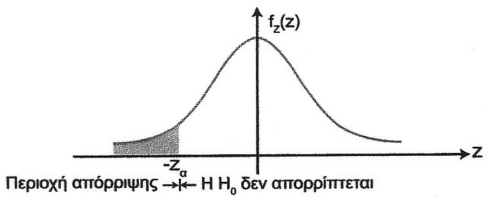
Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από δεξιά για αναλογία*

▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η*

$$H_1 : p < p_0$$

*(**μονόπλευρος έλεγχος** από αριστερά), η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$z < -z_a.$$



Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από αριστερά για αναλογία*

Πίνακας ***Έλεγχοι υποθέσεων για την αναλογία ενός χαρακτηριστικού σε έναν πληθυσμό***

H_0	H_1	Περιοχή απόρριψης της H_0
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\|z\| = \left\| \frac{(y/n) - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \right\| > z_{a/2}$
$p = p_0$	$p > p_0$	$z > z_a$
$p = p_0$	$p < p_0$	$z < -z_a$

Παράδειγμα *Σε ένα δείγμα 150 αντικειμένων που παράγονται από ένα τόρνο τα 6 ήταν ελαττωματικά. Να εξεταστεί αν το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων που παράγονται από τον τόρνο είναι μικρότερο του 7,5% σε στάθμη σημαντικότητας:*
α) 5%, β) 1%.

Λύση

Αν p η αναλογία των ελαττωματικών αντικειμένων που παράγονται από τον τόρνο σε όλο τον πληθυσμό, ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση

$$\frac{y}{n} = \frac{6}{150} = 0,04,$$

οπότε η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.11) για το δείγμα αυτό είναι

$$z = \frac{0,04 - 0,075}{\sqrt{\frac{0,075 \cdot (1 - 0,075)}{150}}} = -1,627.$$

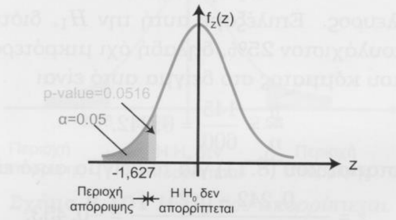
Με τον τρόπο του Παραδείγματος 4.27 ή από τον Πίνακα I βρίσκουμε ότι

$$\Phi(-1,627) = 0,0516,$$

οπότε, σύμφωνα με τον Πίνακα 8.18, η τιμή p του ελέγχου αυτού είναι

$$\text{p-value} = \Phi(-1,627) = 0,0516.$$

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση :
Επειδή p-value $> 0,05$ η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 5%, άρα ούτε σε στάθμη 1%, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από το δείγμα αυτό ότι το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων που παράγονται από τον τόρνο είναι μικρότερο του 7,5%.



Σχήμα *Η H_0 δεν απορρίπτεται.*

Παράδειγμα *Σε μια πόλη το ποσοστό της ανεργίας τον προηγούμενο μήνα ήταν 10%. Σε ένα τυχαίο δείγμα 150 ατόμων βρέθηκαν 21 άνεργοι. Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 2,5% αν το ποσοστό ανεργίας αυξήθηκε το μήνα αυτό.*

Λύση

Αν p η αναλογία των ανέργων σε όλο τον πληθυσμό, ελέγχουμε την υπόθεση

$$H_0 : p = 0,1$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : p > 0,1,$$

οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτήν την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν το ποσοστό της ανεργίας αυξήθηκε.
Η αναλογία των ανέργων στο δείγμα αυτό είναι

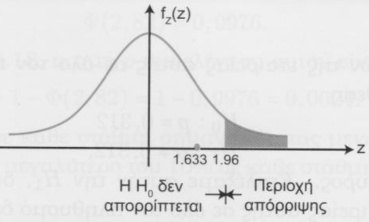
$$\frac{y}{n} = \frac{21}{150} = 0,14,$$

οπότε η τιμή του στατιστικού (8.11) για το δείγμα αυτό είναι

$$z = \frac{0,14 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,9 \cdot 0,1}{150}}} = 1,633.$$

Με τον τρόπο του Παραδείγματος 8.1 βρίσκουμε ότι

$$z_{0,025} = 1,96.$$



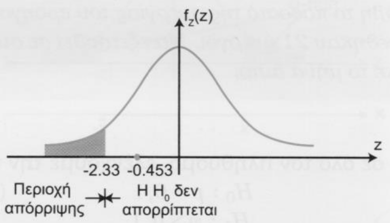
Σχήμα *Η H_0 δεν απορρίπτεται.*

Επειδή
$$z < z_{0,025},$$
(βλ. Πίνακας 8.17) η H_0 δεν απορρίπτεται, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό ότι το ποσοστό ανεργίας δεν αυξήθηκε το μήνα αυτό στην πόλη σε στάθμη σημαντικότητας 2,5%.

Παράδειγμα *Ένα κόμμα πιστεύει ότι το ποσοστό του στον εκλογικό πληθυσμό είναι τουλάχιστον 25%. Για να το ελέγξει αυτό κάνει μια δημοσκόπηση κατά την οποία σε ένα δείγμα 600 ατόμων βρέθηκαν 145 ψηφοφόροι του. Να ελεχθεί σε στάθμη σημαντικότητας 1% αν το ποσοστό του κόμματος είναι 25% και όχι μικρότερο.*

Λύση

Αν p η αναλογία των ψηφοφόρων του κόμματος σε όλο τον πληθυσμό, ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση
$$H_0 : p = 0,25$$
με εναλλακτική την
$$H_1 : p < 0,25,$$
οπότε ο έλεγχος είναι μονόπλευρος. Επιλέξαμε αυτή την H_1, διότι ζητείται να ελέγξουμε αν το ποσοστό του κόμματος είναι τουλάχιστον 25%, δηλαδή όχι μικρότερο του 25%.
Η αναλογία των ψηφοφόρων του κόμματος στο δείγμα αυτό είναι
$$\frac{y}{n} = \frac{145}{600} = 0,242,$$
οπότε η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.11) για το δείγμα αυτό είναι
$$z = \frac{0,242 - 0,25}{\sqrt{\dfrac{0,25 \cdot (1 - 0,25)}{600}}} = -0,453.$$



Σχήμα *Η H_0 δεν απορρίπτεται*

Με τον τρόπο του Παραδείγματος 8.1 βρίσκουμε ότι
$$z_{0,01} = 2,33.$$
Επειδή
$$z > -z_{0,01}$$
η H_0 δεν απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας 1% (βλ. Πίνακα 8.17), οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό ότι το ποσοστό του κόμματος είναι τουλάχιστον 25%.

Έλεγχοι υποθέσεων για διακύμανση

την ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τους ελέγχους υποθέσεων για τη διακύμανση σ^2 ενός πληθυσμού που ακολουθεί κανονική κατανομή και στη συνέχεια για το λόγο των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών που ακολουθούν κανονική κατανομή. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.14; το στατιστικό

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \tag{8.14}$$

ακολουθεί κατανομή χ^2_{n-1}, οπότε (όπως και στην Ενότητα 7.5)

Πρόταση *Η μηδενική υπόθεση*

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

με εναλλακτική την $$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

***(δίπλευρος έλεγχος)**, όπου σ^2 διακύμανση ενός πληθυσμού που ακολουθεί κανονική κατανομή, απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας a αν η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.14)*

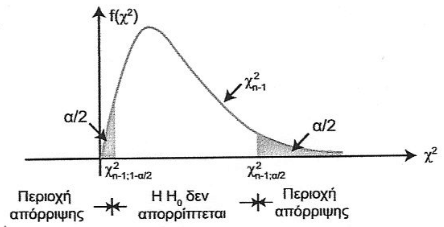
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2},$$

σε ένα δείγμα μεγέθους n βρίσκεται στην περιοχή απόρριψης

$$\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;1-a/2} \quad \acute{\eta} \quad \chi^2 \geq \chi^2_{n-1;a/2},$$

όπου $$\chi^2_{n-1;a/2} = F^{-1}_{n-1}\left(1-\frac{a}{2}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad \chi^2_{n-1;1-a/2} = F^{-1}_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)$$

οι αντίστοιχες τιμές της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής F^{-1}_{n-1} της κατανομής χ^2 με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα *Δίπλευρος έλεγχος για διακύμανση*

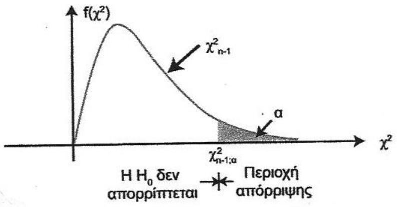
▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η*

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

***(μονόπλευρος έλεγχος από** δεξιά), τότε η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$\chi^2 \geq \chi^2_{n-1;a}.$$

όπου $$\chi^2_{n-1;a} = F^{-1}_{n-1}(1-a).$$



Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από δεξιά για διακύμανση*

▸ *Αν η εναλλακτική υπόθεση είναι η*

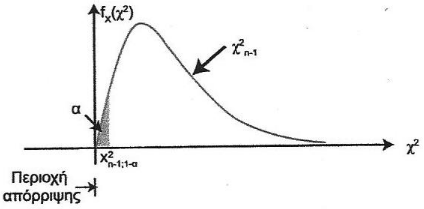
$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

***(μονόπλευρος έλεγχος από** αριστερά), τότε η περιοχή απόρριψης της H_0 είναι*

$$\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;1-a}\cdot$$

όπου

$$\chi^2_{n-1;1-a} = F^{-1}_{n-1}(a).$$



Σχήμα *Μονόπλευρος έλεγχος από αριστερά για διακύμανση*

Οι έλεγχοι υποθέσεων της ενότητας αυτής συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας ***Έλεγχοι υποθέσεων για διακύμανση***

H_0	H_1	Περιοχή απόρριψης της H_0
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;1-a/2}$ ή $\chi^2 \geq \chi^2_{n-1;a/2}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi^2_{n-1;a}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi^2_{n-1;1-a}$

όπου

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}.$$

Εύρεση στο SPSS

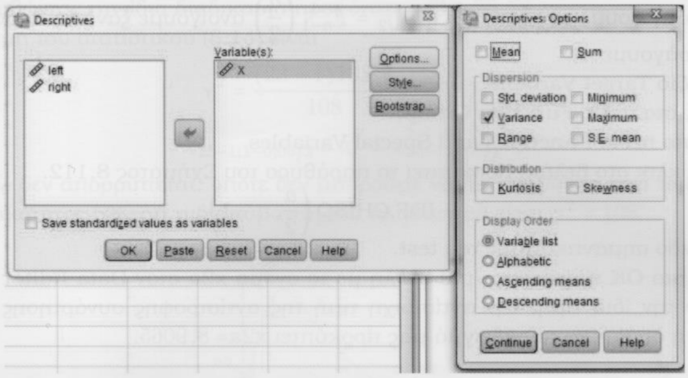
Για να κάνουμε στο SPSS ελέγχους υποθέσεων για τη διακύμανση ενός πληθυσμού, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- ▸ Εισάγουμε σε μία στήλη (μεταβλητή) του Data Editor την οποία ονομάζουμε X
- ▸ Ελέγχουμε την κανονικότητα, με τον τρόπο της Ενότητας 5.11.
- ▸ Επιλέγουμε διαδοχικά από το μενού του Data Editor

Analyze → Descriptive Statistics → Descriptives

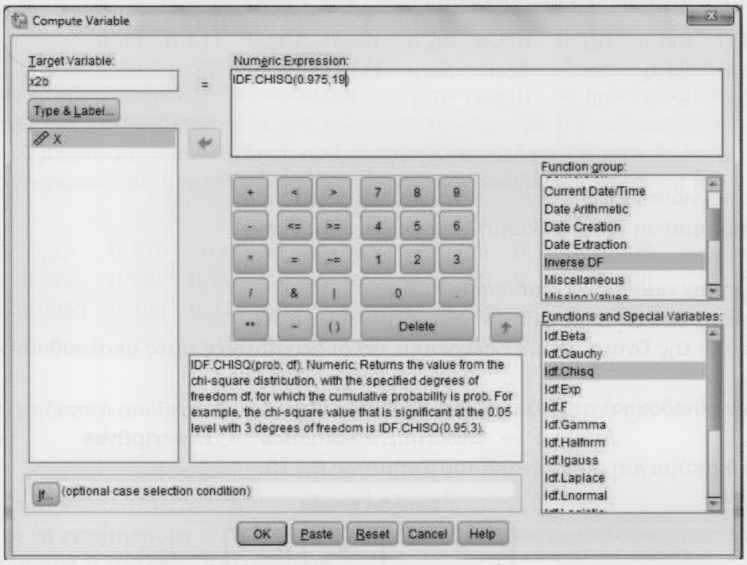
οπότε εμφανίζεται το παράθυρο του Σχήματος 8.111, στο οποίο σέρνουμε τη μεταβλητή X από το αριστερό στο δεξί πλαίσιο Variable(s) και κάνουμε κλικ στο Options οπότε εμφανίζεται ένα μικρότερο παράθυρο, στο οποίο επιλέγουμε μόνο τη διακύμανση (Variance) κάνοντας κλικ στο Continue και μετά στο OK του πρώτου παραθύρου, εμφανίζεται στον Viewer η διακύμανση του δείγματος. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αντίστοιχη τιμή της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2 επιλέγοντας διαδοχικά:

Transform → Compute Variable



Σχήμα *Το παράθυρο Descriptives*

οπότε ανοίγει το παράθυρο του Σχήματος



Σχήμα *Υπολογισμός τιμών της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2*

Στη συνέχεια εισάγουμε στο παράθυρο αυτό:

- x2b, στο πεδίο Target Variable,
- Inverse DF, στο πεδίο Function Group,
- Idf.Chisq, στο πεδίο Functions and Special Variables.

Έτσι, κάνοντας κλικ στο βελάκι προκύπτει το παράθυρο του Σχήματος

- Για να υπολογίσουμε την τιμή $\chi^2_{n-1;a/2} = F^{-1}_{n-1}\left(1-\frac{a}{2}\right)$ της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2 με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, εισάγουμε στα ? του πεδίου Numeric Expression τις τιμές της δοσμένης πιθανότητας στο πρώτο ? (στο παράδειγμά μας υποθέτουμε ότι $a = 0,05$ οπότε

$$\frac{a}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025)$$

και τους βαθμούς ελευθερίας στο δεύτερο ερωτηματικό (π.χ. n-1=20-1=19) (βλ. Σχήμα)

$$\text{IDF.CHISQ}\left(1-\frac{a}{2}, n-1\right) = \text{IDF.CHISQ}(0.975, 19).$$

Κάνοντας κλικ στο OK εμφανίζεται μία στήλη στον Data Editor με το όνομα x2b της οποίας κάθε κελί έχει ως τιμή την αντίστοιχη τιμή της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2, που στην περίπτωση αυτή είναι x2b$= 32,8523$.

- Για να υπολογίσουμε την τιμή $\chi^2_{n-1;1-a/2} = F^{-1}_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)$ ανοίγουμε ξανά το παράθυρο Compute Variable και εισάγουμε:
  - x2a, στο πεδίο Target Variable,
  - Inverse DF, στο πεδίο Function Group,
  - Idf.Chisq, στο πεδίο Functions and Special Variables

Έτσι, κάνοντας κλικ στο βελάκι προκύπτει το παράθυρο του Σχήματος

$$\text{IDF.CHISQ}\left(\frac{a}{2}, n-1\right)$$

όπου a το επίπεδο σημαντικότητας του test.

Κάνοντας κλικ στο ΟΚ εμφανίζεται μία στήλη με το όνομα x2a στον Data Editor της οποίας όλα τα κελιά έχουν την ίδια τιμή, την αντίστοιχη τιμή της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2, η οποία στο παράδειγμά μας προκύπτει x2a$= 8,9065$.

Παράδειγμα *Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 5% αν η διακύμανση ενός πληθυσμού που ακολουθεί κανονική κατανομή είναι $\sigma^2 = 108$ με τη βοήθεια του παρακάτω δείγματος 23 παρατηρήσεων.*

103,0	106,5	101,0	108,4	86,3	65,0	102,7	113,0	96,9
110,0	94,6	89,6	85,6	88,9	114,0	89,5	78,8	95,3
102,0	88,3	96,2	102,0	97,7				

QR 8.34p: Λή
αρχείου δεδομ
qr.tziola.gr/yyWm4

Λύση

Ελέγχουμε την υπόθεση $H_0 : \sigma^2 = 108$,

όπου σ^2 η διακύμανση του πληθυσμού, με εναλλακτική την

$$H_1 : \sigma^2 \neq 108.$$

Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία:

- Εισάγουμε τα δεδομένα στον Data Editor (μεταβλητή X)
- Με τον τρόπο της Ενότητας 5.11 δείχνουμε ότι οι δειγματικές τιμές ακολουθούν κανονική κατανομή.
- Επιλέγουμε διαδοχικά από το μενού του Data Editor

Analyze → Descriptive Statistics → Descriptives

προκύπτει η διακύμανση στον πίνακα του Σχήματος 8.113.

Descriptive Statistics

	N	Variance
X	23	133,364
Valid N (listwise)	23	

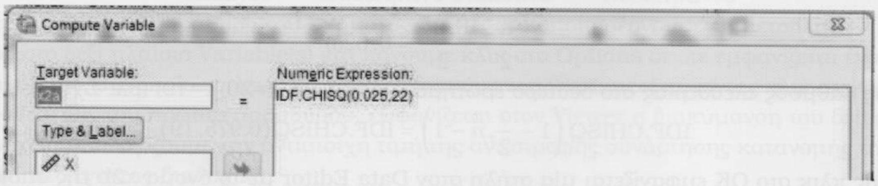
Σχήμα *Η διακύμανση της X στον Viewer*

- Επιλέγοντας διαδοχικά:

Transform → Compute Variable

εμφανίζεται το παράθυρο Compute Variable στο οποίο εισάγοντας τα στοιχεία του Σχήματος 8.114 προκύπτει

x2a$= 10,98$.



Σχήμα *Υπολογισμός τιμής αντίστροφης συνάρτησης κατανομής της κατανομής χ^2 για το Παράδειγμα*

▸ Ενώ, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει, x2b= $36,78$.

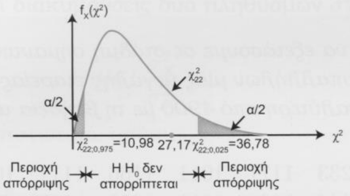
Η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.14) είναι

$$\chi^2 = \frac{(23-1)133,4}{108} = 27,17,$$

οπότε

$$\chi^2_{23-1;1-0,05/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{23-1;0,05/2}.$$

Επομένως, η H_0 δεν απορρίπτεται, οπότε δεν μπορούμε να απορρίψουμε από το δείγμα αυτό, σε στάθμη σημαντικότητας 5%, ότι η διακύμανση του πληθυσμού είναι $\sigma^2 = 108$.



Σχήμα *Η H_0 δεν απορρίπτεται*

Παράδειγμα . *Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 1% αν η διακύμανση της συγκέντρωσης ενός συστατικού σε ένα φάρμακο που παράγει μια φαρμακοβιομηχανία είναι μικρότερη από $0,015gr^2$ από το παρακάτω δείγμα 25 μπουκαλιών φαρμάκου, θεωρώντας ότι η συγκέντρωση του συστατικού ακολουθεί κανονική κατανομή.*

0,277	0,15	0,115	0,6	0,146	0,185	0,125	0,239	0,308
0,278	0,205	0,126	0,307	0,226	0,278	0,206	0,277	0,206
0,187	0,0956	0,126	0,157	0,148	0,365	0,252		

QR 8.35p: Λήψη αρχείου δεδομένων

gr.tziola.gr/oBRxu http://

Λύση

Ελέγχουμε τη μηδενική υπόθεση ότι η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο είναι $0,015gr^2$

$$H_0 : \sigma^2 = 0,015$$

με εναλλακτική την

$$H_1 : \sigma^2 < 0,015,$$

επειδή ζητείται να εκτιμήσουμε αν η διακύμανση της συγκέντρωσης του συστατικού στο φάρμακο είναι μικρότερη από $0,015gr^2$. Επιλέγοντας

Analyze → Descriptive Statistics → Descriptives

προκύπτει ο πίνακας του Σχήματος 8.116, οπότε η δειγματική τιμή του στατιστικού (8.14) είναι

$$\chi^2 = \frac{(25-1)0,005}{0,015} = 8.$$

Descriptive Statistics

	N	Variance
VAR00001	25	,005
Valid N (listwise)	25	

Σχήμα *Η διακύμανση της X στον Viewer*

Με τον τρόπο του παραδείγματος προκύπτει ότι

$$\chi^2_{25-1;1-0,01} = 10,86, \quad \text{οπότε} \quad \chi^2 < \chi^2_{25-1;1-0,01}.$$

Επομένως (βλ. Πίνακα), η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας $a = 0,01$, οπότε μπορούμε να συνάγουμε από το δείγμα αυτό ότι η διακύμανση της συγκέντρωσης είναι μικρότερη από $0,015$.

. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑΣ

Έστω ότι τα στοιχεία ενός πληθυσμού μπορούν να ταξινομηθούν ως προς δύο χαρακτηριστικά (μεταβλητές) και επιθυμούμε να ελέγξουμε με τη βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος αν τα δύο αυτά χαρακτηριστικά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Αν ***A*** και ***B*** είναι δύο μεταβλητές (χαρακτηριστικά) και η μεταβλητή ***A*** έχει ***r*** κατηγορίες: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$, και η μεταβλητή ***B*** έχει ***κ*** κατηγορίες: $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\kappa$, θέλουμε να ελέγξουμε αν οι δύο αυτές μεταβλητές ***A*** και ***B*** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Για να γίνει ένας τέτοιος έλεγχος, ταξινομούμε τα ***n*** στοιχεία του δείγματος σε έναν πίνακα διπλής εισόδου με ***κ*** γραμμές και ***r*** στήλες. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται πίνακας συνάφειας και η γενική μορφή του είναι αυτή του πίνακα 22.9.

Πίνακας

B	A							
	A_1	A_2	A_3	...	A_j	...	A_r	$f_{i\cdot}$
B_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	...	f_{1j}	...	f_{1r}	$f_{1\cdot}$
B_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	...	f_{2j}	...	f_{2r}	$f_{2\cdot}$
B_3	f_{31}	f_{31}	f_{31}	...	f_{3j}	...	f_{3r}	$f_{3\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_i	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	...	f_{ij}	...	f_{ir}	$f_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_κ	$f_{\kappa 1}$	$f_{\kappa 2}$	$f_{\kappa 3}$	...	$f_{\kappa j}$	...	$f_{\kappa r}$	$f_{\kappa\cdot}$
$f_{\cdot j}$	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	$f_{\cdot 3}$	...	$f_{\cdot j}$	...	$f_{\cdot r}$	n

Για να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση ότι οι δύο μεταβλητές ***Α*** και ***Β*** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, καταρτίζουμε τον πίνακα των θεωρητικών τιμών

Κάθε τιμή του πίνακα των θεωρητικών τιμών υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\theta_{ij} = \frac{f_{i\cdot} \cdot f_{\cdot j}}{n}$$

Για να γίνει ο έλεγχος της ανεξαρτησίας των μεταβλητών ***Α*** και ***Β***, συγκρίνουμε τις εμπειρικές (f_{ij}) με τις θεωρητικές συχνότητες (θ_{ij}). Αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, τότε αποδεικνύεται ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής:

Πίνακας

Χαρακτηριστικό Β	*Χαρακτηριστικό Α*					
	A_1	A_2	...	A_j	...	A_r
B_1	θ_{11}	θ_{12}	...	θ_{1j}	...	θ_{1r}
B_2	θ_{21}	θ_{22}	...	θ_{2j}	...	θ_{2r}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_i	θ_{i1}	θ_{i2}	...	θ_{ij}	...	θ_{ir}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
B_κ	$\theta_{\kappa 1}$	$\theta_{\kappa 2}$	...	$\theta_{\kappa j}$	...	$\theta_{\kappa r}$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{r} \frac{(f_{ij} - \theta_{ij})^2}{\theta_{ij}}$$

προσεγγίζει την κατανομή χ^2 με $v = (r-1)(\kappa-1)$ βαθμούς ελευθερίας.

Για τον έλεγχο, επομένως, της ανεξαρτησίας των μεταβλητών ***Α*** και ***Β*** χρησιμοποιούμε το κριτήριο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{j=1}^{r} \frac{(f_{ij} - \theta_{ij})^2}{\theta_{ij}}$$

Ύστερα συγκρίνουμε την τιμή x^2 με την κρίσιμη τιμή $\chi^2_{v,\alpha}$, που βρίσκουμε στοος πίνακες. Αν έχουμε $x^2 < \chi^2_{v,\alpha}$, οι μεταβλητές ***Α*** και ***Β*** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στην περίπτωση που ο πίνακας διπλής εισόδου είναι τετράπτυχος (2 x 2), η τιμή x^2 υπολογίζεται, χωρίς να υπολογιστούν πρώτα οι θεωρητικές τιμές, με τον τύπο:

$$x^2 = \frac{n(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma)^2}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}$$

Πίνακας

B	A		
	A_1	A_2	$f_{i\cdot}$
B_1	α	β	$\alpha+\beta$
B_2	γ	γ	$\gamma+\delta$
$f_{\cdot j}$	$\alpha+\gamma$	$\beta+\delta$	$n=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε την τιμή x^2 με την τιμή $\chi^2_{v,\alpha}$, που βρίσκουμε στους πίνακες με $v=(\kappa-1)(r-1)$ βαθμούς ελευθερίας.

Παράδειγμα

Σε ένα δείγμα 200 φοιτητών να ελεγχθεί, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 1\%$, αν η επίδοση στο μάθημα της Επαγωγικής Στατιστικής είναι ανεξάρτητη από την επίδοση στο μάθημα του Λογισμού των Πιθανοτήτων (βλ. πινακα

Πίνακας

Επίδοση στην Επαγωγική Στατιστική (Β)	*Επίδοση στο Λογισμό των Πιθανοτήτων (Α)*			
	Καλή	*Πολύ καλή*	*Άριστη*	$f_{i\cdot}$
Καλή	10	40	10	60
Πολύ καλή	30	30	20	80
Άριστη	10	30	20	60
$f_{\cdot j}$	50	100	50	200

Λύση:

Σχηματίζουμε πρώτα τον πίνακα των θεωρητικών τιμών, ή πίνακα ανεξαρτησίας, με εφαρμογή της σχέσης:

$$\theta_{ij} = \frac{f_{i\cdot} \cdot f_{\cdot j}}{n}$$

και με την υπόθεση ότι οι δύο μεταβλητές της είναι ανεξάρτητες, π.χ.:

$$\theta_{11} = \frac{60 \cdot 50}{200} = 15,\ \theta_{12} = \frac{60 \cdot 100}{200} = 30, \ldots$$

Έτσι κατασκευάζεται ο πίνακας των θεωρητικών τιμών

Πίνακας

B	*A*		
	Καλή	*Πολύ Καλή*	*Άριστη*
Καλή	15	30	15
Πολύ Καλή	20	40	20
Άριστη	15	30	15

Για τον έλεγχο της υπόθεσης H_0 ότι οι δύο μεταβλητές $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι ανεξάρτητες, χρησιμοποιούμε το κριτήριο:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{r}\frac{(f_{ij}-\theta_{ij})^2}{\theta_{ij}} = \frac{(10-15)^2}{15}+\frac{(40-30)^2}{30}+\frac{(10-15)^2}{15}+$$

$$+\frac{(30-20)^2}{20}+\frac{(30-40)^2}{40}+\frac{(20-20)^2}{20}+$$

$$+\frac{(10-15)^2}{15}+\frac{(30-30)^2}{30}+\frac{(20-15)^2}{15}=17{,}5$$

Από τους πίνακες, σε επίπεδο σημαντικότητας 1% και βαθμούς ελευθερίας $v = (3-1)(3-1) = 4$, θα έχουμε:

$$\chi^2_{v,\alpha} = \chi^2_{4,1\%} = 13{,}28$$

Επειδή $x^2 = 17{,}5 > \chi^2_{v,\alpha} = 13{,}28$, η υπόθεση ότι η επίδοση στο μάθημα του Λογισμού των Πιθανοτήτων δεν ασκεί επίδραση στην επίδοση στο μάθημα της Επαγωγικής Στατιστικής απορρίπτεται και επομένως, υπάρχει σχέση αλληλοεξάρτησης των δύο αυτών μαθημάτων, δηλαδή του Λογισμού Πιθανοτήτων και της Επαγωγικής Στατιστικής.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ KOLMOGOROV - SMIRNOV

Ο έλεγχος αυτός ανήκει στην κατηγορία των μη παραμετρικών ελέγχων και διακρίνεται σε έλεγχο ενός δείγματος καύσε έλεγχο δύο δειγμάτων.

Έστω μια τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ που παίρνει τιμές $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, .., X_\kappa$, με συνάρτηση κατανομής:

$$\varphi(x) = P\{X < X_i\}$$

Λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα των $\boldsymbol{n}$ παρατηρήσεων $x_1, x_2, \ldots, X_n$. Η συνάρτηση κατανομής του δείγματος θα είναι:

$$F(x) = P\{X < x_i\}$$

Με τον έλεγχο αυτό θα συγκρίνουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής του δείγματος $F(x)$ με την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας θεωρητικής κατανομής $\Phi(x)$.

Αν η συνάρτηση κατανομής του δείγματος $F(x)$ βρίσκεται κοντά στη συνάρτηση κατανομής $\Phi(x)$/του θεωρητικού πληθυσμού, τότε συμπεραίνουμε ότι το παραπάνω δείγμα ικανοποιεί την υπόθεση H_0, δηλαδή ότι προέρχεται από ένα πληθυσμό στον οποίο η μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ έχει συνάρτηση κατανομής την $\Phi(x)$.

Ο παραπάνω έλεγχος της υπόθεσης ότι το δείγμα προέρχεται από την κατανομή που έχει συνάρτηση κατανομής την $\Phi(x)$, ως προς την εναλλακτική υπόθεση ότι το δείγμα προέρχεται από οποιαδήποτε άλλη κατανομή, γίνεται με το κριτήριο:

$$D_0 = \max|\Phi(x) - F(x)|$$

Την τιμή D_0 τη συγκρίνουμε με την τιμή $D_{n,a}$ την οποία βρίσκουμε σε πίνακες και αποφασίζουμε για την αποδοχή, αν $D_0 < D_{n,a}$.

Για μεγάλες τιμές του $\boldsymbol{n}$ οι τιμές $D_{n,a}$ βρίσκονται προσεγγιστικά από ειδικούς τύπους ανάλογα με το επίπεδο σημαντικότητας. Π.χ. για $\alpha = 5\%$ η τιμή του $D_{n,5\%}$ είναι $\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$ και για $\alpha = 1\%$ η τιμή του θα είναι: $D_{n,1\%}$ είναι $\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}$.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε συγχρόνως 4 ζάρια 81 φορές. Θεωρείται ως επιτυχία, αν εμφανιστεί ο αριθμός 5 ή 6. Στον πίνακα 22.18 μεταφέρονται όλα τα αναγκαία στοιχεία για την ανάλυση.

Στη στήλη (3) φαίνονται οι σχετικές συχνότητες, που τις πήραμε από τη διαίρεση των απόλυτων συχνοτήτων δια του συνολικού αριθμού των δοκιμών. Στη στήλη (4) φαίνονται οι πιθανότητες που λαμβάνονται από την ανάπτυξη του διωνύμου:

$$81\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^4$$

Να γίνει έλεγχος προσέγγισης της δειγματοληπτικής με τη θεωρητική κατανομή, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Λύση:

Με τη βοήθεια του test του Kolmogorv εξετάζουμε εάν η δειγματοληπτική κατανομή πλησιάζει τη θεωρητική κατανομή.

Για το σκοπό αυτό απαιτείται η κατασκευή των θεωρητικών και εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής. Αυτό επιτυγχάνεται, εάν υπολογίσουμε τις αθροιστικές τιμές των στηλών (3) και (4). Έτσι λαμβάνονται οι δύο συναρτήσεις κατανομής $\Phi(x)$ και $F(x)$ που φαίνονται αντίστοιχα στη στήλη (5) και (6), ενώ στη στήλη (7) φαίνονται οι αποκλίσεις $|\Phi(x) - F(x)|$.

Από την εξέταση της στήλης (7) προκύπτει ότι η μέγιστη διαφορά μεταξύ της θεωρητικής και της εμπειρικής κατανομής είναι:

$$D_0 = 0{,}0617$$

Πίνακα

(1) Επιτυχίες	(2) Απόλυτη συχνότητα α_i	(3) Σχετική συχνότητα $f_i = \frac{a_i}{N}$	(4) Πιθανότητα P_i	(5) $\Phi(x) = \sum P_i$	(6) $F(x) = \sum \frac{a_i}{N}$	(7) $\lvert\Phi(x) - F(x)\rvert$
0	11	0,1358	0,1975	0,1975	0,1358	0,0617
1	34	0,4198	0,3951	0,5926	0,5556	0,0370
2	30	0,3704	0,2963	0,8889	0,9260	0,0371
3	6	0,0740	0,0987	0,9876	1,0000	0,0124
4	0	0,0000	0,0124	1,0000	1,0000	0,0000
Σύνολο	81	1,0000	1,0000		1,0000	

Για να αποφασίσουμε λοιπόν περί της αποδοχής ή μη της υποθέσεως H_0, απαιτείται η σύγκριση της τιμής D_0 με την τιμή της $D_{n,1\%}$, που την πήραμε από πίνακα, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 και μέγεθος δείγματος 81:

$$D_{81,1\%} = \frac{163}{\sqrt{81}} \approx 0{,}181$$

Επειδή $D_0 = 0{,}0617$και $D_{n,1\%} = 0{,}181$,δηλαδή $D_0 < D_{n,1\%}$,αποδεχόμαστε την υπόθεση H_0 ότι η θεωρητική κατανομή πλησιάζει αρκετά την εμπειρική κατανομή:

$$81\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^4$$