ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ιστορία των Μαθηματικών

Ενότητα 2.4: Εύδοξος, Τομές του Dedekind.

Χαρά Χαραλάμπους
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας

- Τι είναι απόδειξη?
- Πυθαγόρας, Πλατωνικά Στερεά, άρρητα μεγέθη, παράδοξα του Ζήνωνα.
- Τα περίφημα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας.
- Εύδοξος, Τομές του Dedekind.
- Ευκλείδης και τα Στοιχεία.
- Το πέμπτο αίτημα και οι μη Ευκλείδειες γεωμετρίες, το πρόγραμμα του Hilbert.

Σκοποί Ενότητας

- Στην ενότητα αυτή δίνεται περιγράφεται η ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα σε αντιδιαστολή με τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, περιγράφεται η συμβολή των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην εξέλιξη των μαθηματικών, γίνεται η σύνδεση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» με την ανακάλυψη των μη Ευκλείδιων γεωμετριών, και γίνεται μία εισαγωγή στην ιδέα της πλήρης αξιωματοποίησης της Ευκλείδιας γεωμετρίας.

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355)(1)

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355) μαθηματικός, φιλόσοφος, αστρονόμος, γεωγράφος.

Πριν: Σύμφωνα με την πυθαγόρεια αντιμετώπιση η διαγώνιος και η ακμή τετραγώνου δεν είναι συγκρίσιμα.

Ορισμός Ευδόξου:

Δύο μεγέθη είναι συγκρίσιμα και σχηματίζουν λόγο όταν (ακέραιο) πολλαπλάσιο του ενός ξεπερνά το άλλο, («Στοιχεία» του Ευκλείδη, Βιβλίο 5, ορισμός 4).

Εύδοξος από την Κνίδο (408-355)(2)

Παράδειγμα:

1. μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος και το εμβαδόν ενός σχήματος δεν συγκρίνονται μεταξύ τους.
2. Η διαγώνιος και η ακμή του τετραγώνου σχηματίζουν λόγο.

Θα συμβολίσουμε τον λόγο ανάμεσα στα a και b με $a\colon b$.

Πότε είναι δύο λόγοι ίσοι? Πότε είναι δύο λόγοι άνισοι?
(τι είδους ποσότητες είναι οι λόγοι?)

Παρόλο που διαφορετικού «τύπου» μεγέθη δε σχηματίζουν λόγο, μπορούμε να συγκρίνουμε λόγους, (ακόμα και αν αυτοί προέρχονται από διαφορετικού τύπου μεγέθη).

Εύδοξος από την Κνίδο(3)

Για να είναι $a : b = c : d$ θα πρέπει για κάθε ζευγάρι (m, n) ακεραίων θα πρέπει να ισχύει

1. αν $ma < nb$ τότε $mc < nd$.
2. αν $ma = nb$ τότε $mc = nd$.
3. αν $ma > nb$ τότε $mc > nd$.

Προκύπτει ότι:

Αν $a : b > c : d$ τοτε για $e < a$ ισχυει *ότι* $e : b = c : d$.

(Σήμερα θα λέγαμε: $a : b = c : d$ αν και μόνο αν $ad = bc$)

Είναι οι δύο ορισμοί ισοδύναμοι?
Γιατί δεν όρισε έτσι ο Εύδοξος την ισότητα των λόγων?
Τι προυποθέτει ο σύγχρονος ορισμός?)

Παράδειγμα 1 με τον ορισμό του Ευδόξου

Ισχύει ότι $3:6 = 4:8$.

- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 < n6$ τότε $m < 2n$ και $m4 < n8$.
- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 = n6$ τότε $m = 2n$ και $m4 = n8$.
- αν (m, n) έτσι ώστε $m3 > n6$ τότε $m > 2n$ και $m4 > n8$.

Παράδειγμα 2

Πρόταση :

Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A.

Τότε

$$\mathbf{a}:\boldsymbol{A}=\boldsymbol{d^2}:\boldsymbol{D^2}$$

(θα δώσουμε σκίτσο απόδειξης της Πρότασης, για τη πλήρη απόδειξη, βλ. Ευκλείδη, βιβλίο 12.)

Λήμμα (Εύδοξος) (1)

- **Λήμμα (Εύδοξος):** Αν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε ένα τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε πάλι τμήμα μεγαλύτερο ή ίσο του μισού του και αν συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία των αφαιρέσεων, θα καταλήξουμε σε μέγεθος μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο μέγεθος του ίδιου είδους.

Το Λήμμα αποδίδεται και αυτό στον Εύδοξο και είναι η Πρόταση 1 στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, βιβλίο 10. (δηλ. δίνεται με απόδειξη!)

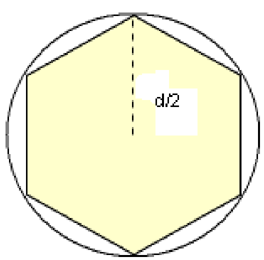
Λήμμα (Εύδοξος) (2)

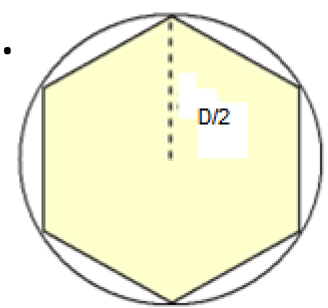
Πρώτα δείχνουμε ότι ισχύει αντίστοιχο θεώρημα για τα κανονικά πολύγωνα που εγγράφονται στους κύκλους.

Προκαταρτική Πρόταση: Έστω δύο κανονικά πολύγωνα με n ακμές , εγγεγραμμένα σε δύο κύκλους με ακτίνα d και D και με εμβαδά p_n και P_n.

Τότε

$$d^2 \colon D^2 = p_n \colon P_n.$$

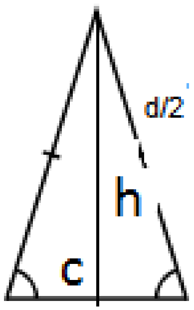




Προκαταρτική Πρόταση

Πράγματι, το εμβαδό t του Ισοσκελούς

Τριγώνου της εικόνας είναι



$$t = c\sqrt{\frac{d^2}{4} - c^2} = \frac{cd}{2}\sqrt{1 - 4\frac{c^2}{d^2}}$$

Έτσι αν έχουμε δύο όμοια ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές $d/2$ και $D/2$ και βάσεις $2c$ και $2C$ αντίστοιχα,

έπεται ότι

$$\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$$

Προκαταρτική Πρόταση συνέχεια

και άρα για τα εμβαδά τους t και T έχουμε τη σχέση

$$\frac{t}{T} = \frac{d^2}{D^2}$$

Τα κανονικά πολύγωνα που συγκρίνουμε είναι αθροίσματα τέτοιων τριγώνων.

Άρα ισχύει και ο ζητούμενος λόγος για τα εμβαδά τους.

Πρόταση για τους κύκλους (1)

Πίσω στην Πρόταση για τους κύκλους: Έστω κύκλοι c και C, με διαμέτρους d και D, εμβαδά a και A. Τότε

$$\mathbf{a}:\mathbf{A} = \mathbf{d^2}:\mathbf{D^2}$$

Για τον λόγο $a:A$έχουμε τρείς περιπτώσεις

1. $a:A = d^2:D^2$
2. $a:A < d^2:D^2$
3. $a:A > d^2:D^2$

Θα αποκλείσουμε τις δύο τελευταίες περιπτώσεις.

Πρόταση για τους κύκλους (2)

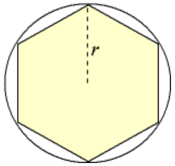
Έστω ότι

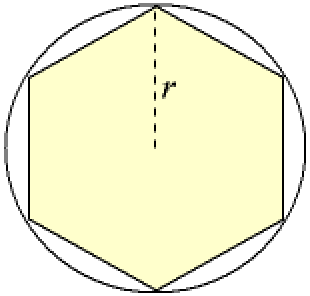
$$a: A > d^2: D^2.$$

Τότε υπάρχει a' έτσι ώστε

$$a' < a,\ a': A = d^2: D^2$$

Θέτουμε $e = a - a'$. Εγγράφουμε κανονικά πολύγωνα στους δύο κύκλους.





Πρόταση για τους κύκλους (3)

Διπλασιάζουμε ταυτόχρονα στους δύο κύκλους τις πλευρές των πολυγώνων .Κάθε φορά που διπλασιάζουμε τον αριθμό των πλευρών, το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στο κύκλο και στο πολύγωνο μικραίνει.

Κάποια στιγμή σύμφωνα με το πρώτο Λήμμα, όταν ο αριθμός ακμών n είναι αρκετά μεγάλος θα ισχύει ότι

$$a - p_n < e \Rightarrow a - p_n < a - a' \Rightarrow p_n > a'$$

Όμως

$$p_n : P_n = d^2 : D^2 = a' : A$$

Άρα

$$P_n > A \qquad \text{Άτοπο!}$$

Πρόταση για τους κύκλους (4)

Η άλλη περίπτωση

$$a : A < d^2 : D^2$$

γίνεται με τον ίδιο τρόπο (άσκηση).

Να ελεγχθεί επίσης ότι το εμβαδόν ανάμεσα στον κύκλο και το πολύγωνο μικραίνει τουλάχιστον κατά το ½ για να εφαρμοστεί το Λήμμα του Ευδόξου.

Τελικά τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;

Τελικά τι είναι οι πραγματικοί αριθμοί?

Τι ακριβώς είναι οι άρρητοι?

Ο ορισμός των λόγων του Ευδόξου ενέπνευσε τον Dedekind στην προσπάθεια της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί?

Είναι το ρίζα 2 «όμοιο» με το π?

Πως ορίζονται αξιωματικά από το σύστημα των ρητών αριθμών οι πραγματικοί αριθμοί?

Τομές του Dedekind (1831-1916) στους ρητούς: δημιουργία των άρρητων (αξιωματική θεμελίωση)

Εικόνα 1

Τομές του Dedekind (1)

Ξεκινάμε από το σύνολο των ρητών (στον κόσμο μας δεν υπάρχουν οι άρρητοι) και φτιάχνουμε **τομές** δηλαδή διαμερίσεις του Q σε σύνολα A και B με κάποιες ιδιότητες που θα δούμε παρακάτω:

Για παράδειγμα, η τομή που θα αντιστοιχεί στην τετραγωνική ρίζα του 2 είναι η παρακάτω διαμέριση του Q:

$$\mathrm{A} = \{x \in Q : x^2 < 2\} \cup \{x \in Q : x \leq 0\}, B = Q/A$$

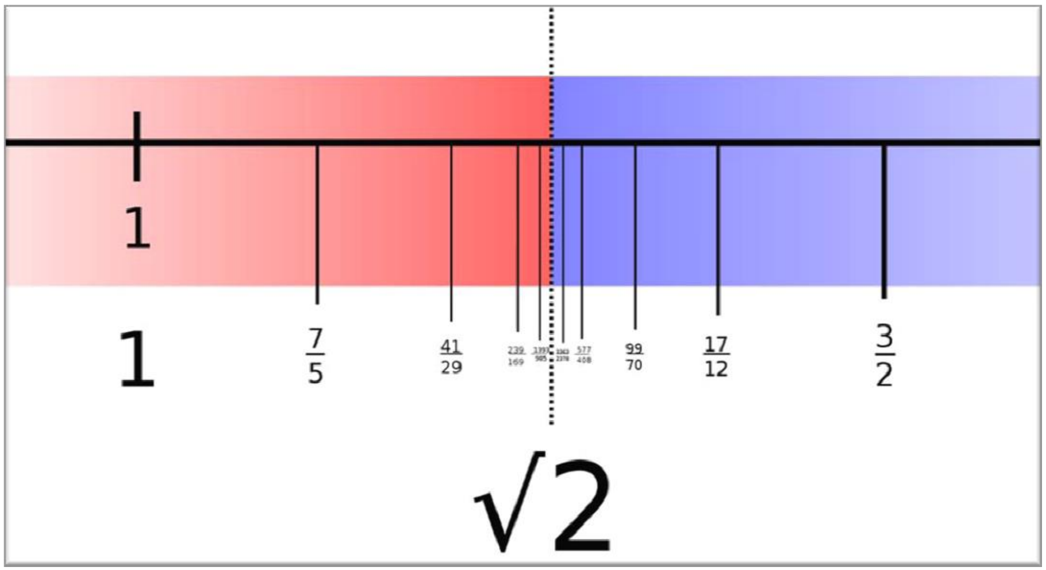
Ιδιότητες:

- το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο ενώ αν x είναι στο A και y είναι μικρότερο του x τότε y ανήκει στο A.
- Όλα τα στοιχεία του B είναι μεγαλύτερα αυτών του A

Τομές του Dedekind (2)

Θεωρούμε το σύνολο των τομών του Q.
Έστω (A,B) μία τέτοια τομή.
Αν το σύνολο B έχει ελάχιστο (στους ρητούς) τότε η τομή αντιστοιχεί σε αυτόν τον ρητό. (Το σύνολο λοιπόν των ρητών μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο των τομών). Αν όμως το B δεν έχει ελάχιστο στους ρητούς, τότε η τομή είναι κάτι καινούργιο: ένας άρρητος. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα το σύνολο B δεν είχε ελάχιστο στους ρητούς και ονομάζουμε την αντίστοιχη τομή τετραγωνική ρίζα του 2.
Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεμελιωθούν ως τέτοιες τομές με κατάλληλα ορισμένες πράξεις.

Dedekind



Κόκκινο $\mathrm{A} = \{x \in Q : x^2 < 2\} \cup \{x \in Q : x \leq 0\}$

Μπλε $B = Q/A$

Ποια είναι η σχέση όμως με τον Εύδοξο?

Θα το δείξουμε για τη $\sqrt{2}$:

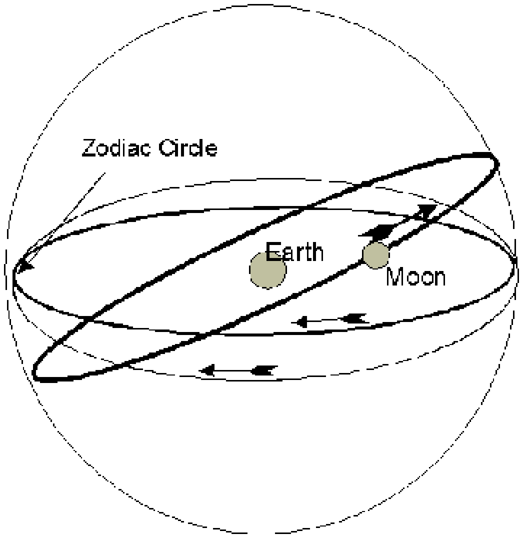
Σύμφωνα με τη θεωρία των λόγων του Ευδόξου, χωρίζουμε τις δυάδες (m, n) του $N \times N$ (αντιστοιχία με ρητούς) σε δύο σύνολα. Τα σύνολα αυτά δίνουν και διαμέριση (τομή (!)) των ρητών:

Ένα σύνολο A αν $\sqrt{2}m \leq n1$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} \leq \frac{n}{m}$

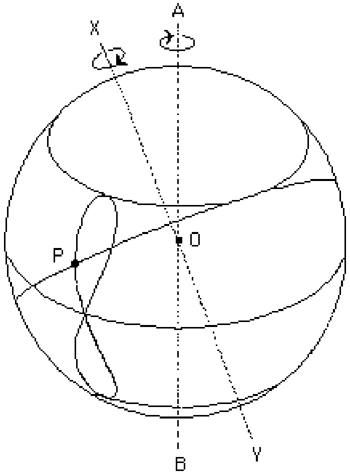
και ένα σύνολο B αν $\sqrt{2}m > n1$ δηλαδή αν $\frac{\sqrt{2}}{1} > \frac{n}{m}$.

Εύδοξος και οι πλανήτες (Μεταφυσική του Αριστοτέλη)

Μοντέλο για τη σελήνη



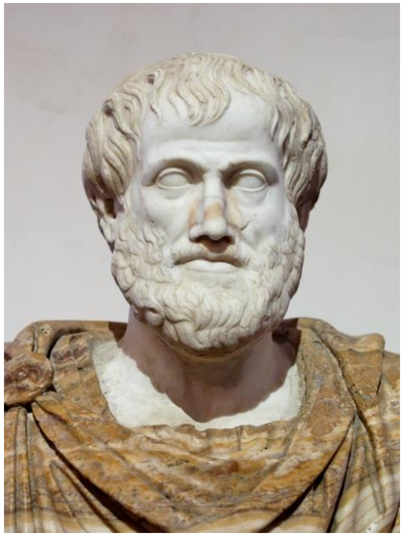
Καμπύλη ιπποπέδης



Σφαίρες που ο άξονας της μίας είναι η διάμετρος της άλλης. Όταν περιστρέφεται η μία, περιστρέφεται και ο άξονας της άλλης.

Αριστοτέλης **384 π.Χ. - 322 π.Χ.**

Η αριστοτέλεια μεθοδολογία (ταξινόμηση, παρατήρηση, ανάλυση) θα υιοθετηθεί απ' τον Ευρωπαϊκό Διαφωτισμό.



Εικόνα 2

Ο Αριστοτέλης ήταν κυρίως φιλόσοφος και βιολόγος.

Η μεγάλη συνεισφορά του στην εξέλιξη των μαθηματικών είναι οι βάσεις της λογικής που έθεσε και οι συνεχείς αναφορές σε μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα.

Βιβλιογραφία

- Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach, *Η ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πνευματικός Γ. Α., 1997.
- Dirk Struik, *Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών*, Εκδόσεις ΔΑΙΔΑΛΟΣ, 2008.
- Katz V., *Ιστορία των Μαθηματικών, Μια Εισαγωγή*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

- **Εικόνα 1:** "**Dedekind**" by not found -http://dbeveridge.web.wesleyan.edu/wescourses/2001f/chem160/01/Photo_Gallery_Science/Dedekind/FrameSet.htm. Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dedekind.jpeg#mediaviewer/File:Dedekind.jpeg
- **Εικόνα 2:** "**Aristotle Altemps Inv8575**" by Copy of Lysippus - Jastrow (2006). Licensed under Public domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg#mediaviewer/File:Aristotle_Altemps_Inv8575.jpg

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χαρά Χαραλάμπους. «Ιστορία των Μαθηματικών. Ενότητα 2: Τα Μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα. Ενότητα 2.4: Εύδοξος, Τομές του Dedekind». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS249/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης