Κεφάλαιο 1

Αριθμοί

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο εξυπηρετεί δύο αλληλοκαλυπτόμενους σκοπούς. Πρώτον, θυμίζει στον αναγνώστη πολλές από τις γνώσεις που είναι προαπαιτούμενες σε ένα μάθημα Λογισμού συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ιδιαιτέρως παρουσιάζοντας το συμβολισμό και τους ορισμούς που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια· επειδή η ύλη είναι γνωστή από το Λύκειο, είμαστε αρκετά περιληπτικοί. Δεύτερον, αποτελεί σύντομη εισαγωγή στην αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών· σε αντίθεση με τη συνήθη λυκειακή προσέγγιση, ξεκινάμε από ένα ελάχιστο πλήθος ιδιοτήτων που αποδεχόμαστε αξιωματικά, και κατόπιν δείχνουμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε, βάσει αυτών, *όλες* τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών· ιδιαιτέρως, εισάγουμε την έννοια του supremum, που είναι απαραίτητη σε πολλά κρίσιμα σημεία της ανάπτυξης της θεωρίας, όπως, για παράδειγμα, στην απόδειξη του Θεωρήματος του Bolzano και στον ορισμό του ολοκληρώματος.

Στην Παράγραφο 1.1 θυμίζουμε εν περιλήψει μερικούς βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς συνόλων. Στην Παράγραφο 1.2 παρουσιάζουμε την πρώτη ομάδα αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών, και συγκεκριμένα τα Αξιώματα Πεδίου, και στην Παράγραφο 1.3 ορισμένες από τις βασικότερες συνέπειές τους. Στην Παράγραφο 1.4 παρουσιάζουμε την δεύτερη ομάδα αξιωμάτων των πραγματικών αριθμών, τα Αξιώματα Διάταξης. Στην Παράγραφο 1.5 εξετάζουμε κάποιες βασικές έννοιες που αφορούν τα διαστήματα και τα σύνολα. Στην Παράγραφο 1.6 παρουσιάζουμε τις καινούργιες έννοιες του supremum και του infimum, και ολοκληρώνουμε με την Παράγραφο 1.7 και το τελευταίο αξίωμα των πραγματικών αριθμών που απομένει να αναφερθεί, το Αξίωμα της Πληρότητας.

1.1 Σύνολα

Συμβολίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς με $\mathbb{R}$, τους ρητούς με $\mathbb{Q}$, τους ακέραιους με $\mathbb{Z}$, και τους φυσικούς (που περιλαμβάνουν το 0) με $\mathbb{N}$. Επίσης, συμβολίζουμε τους μιγαδικούς (που θα δούμε πάντως ελάχιστα σε αυτό το βιβλίο) με $\mathbb{C}$. Συμβολίζουμε τα σύνολα που προκύπτουν από τα παραπάνω αν αφαιρέσουμε το 0 με $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{N}^*$ και $\mathbb{C}^*$ αντίστοιχα.

Ακόμα, ο συμβολισμός $\forall x \in A$ σημαίνει «για κάθε x στο σύνολο A», ενώ ο συμβολισμός $\exists x \in A$ σημαίνει ότι «υπάρχει x στο σύνολο A». Ο συμβολισμός $:$ (άνω-κάτω τελεία) σημαίνει «τέτοιο ώστε». Έτσι, για παράδειγμα, η έκφραση

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

σημαίνει ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $n > x$.

Αναφέρουμε τους ακόλουθους ορισμούς από τη θεωρία συνόλων:

Ορισμός 1.1. ***(Σύνολα)***

1. *Έστω σύνολα A, B πραγματικών αριθμών. Γράφουμε $A \subseteq B$ και λέμε πως το A είναι* ***υποσύνολο*** *του B αν $\forall x \in A$ θα έχουμε και $x \in B$. Επίσης γράφουμε $A \subset B$ και λέμε πως το A είναι* ***γνήσιο υποσύνολο*** *του B αν το A είναι υποσύνολο του B και επιπλέον $\exists x \in B : x \notin A$.*

2. *Ορίζουμε το* ***συμπλήρωμα*** *ενός συνόλου A ως το σύνολο $A^c \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$.*

3. *Ορίζουμε την* ***ένωση*** *$A \cup B$ δύο συνόλων A, B ως το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα A, B:*

$$A \cup B \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

4. *Ορίζουμε την* ***τομή*** *$A \cap B$ δύο συνόλων A, B ως το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο A, B:*

$$A \cap B \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ και } x \in B\}.$$

5. *Ορίζουμε τη* ***διαφορά*** *$A \setminus B$ του συνόλου B από το σύνολο A ως $A \setminus B \triangleq A \cap B^c$, δηλαδή το σύνολο που προκύπτει αν από όλα τα σημεία που ανήκουν στο A, βγάλουμε όσα τυχόν ανήκουν στο B.*

Ο συμβολισμός $x \triangleq y$ σημαίνει ότι το x ισούται με το y εξ' ορισμού. Τέλος, χάριν συντομίας, θα γράφουμε και «ανν» αντί για το «αν και μόνο αν».

1.2 Αξιώματα Πεδίου

Αξιώματα Πεδίου: *Εφοδιάζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με δύο πράξεις, την πρόσθεση $+$ και τον πολλαπλασιασμό $\times$, για τις οποίες απαιτούμε να έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, που καλούνται* ***Αξιώματα Πεδίου****:*

Α.1 (Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$.

Α.2 (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Α.3 (Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, που συμβολίζουμε με το 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει ότι $0 + x = x$.

Α.4 (Αντίθετο στοιχείο) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $x + y = 0$.

Α.5 (Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x \times y = y \times x$.

Α.6 (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

Α.7 (Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) Υπάρχει στοιχείο του $\mathbb{R}$, που συμβολίζουμε με το 1, και είναι διάφορο του 0, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει $1 \times x = x$.

Α.8 (Αντίστροφο στοιχείο) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $xy = 1$.

Α.9 (Επιμεριστική ιδιότητα) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Επομένως, τέσσερα από τα αξιώματα αφορούν ιδιότητες της πρόσθεσης, τέσσερα αφορούν ιδιότητες του πολλαπλασιασμού, και ένα συνδέει την πρόσθεση με τον πολλαπλασιασμό. Για λόγους συντομίας, στο εξής, θα γράφουμε και xy αντί για $x \times y$. Επίσης, ενίοτε θα γράφουμε και $x \cdot y$ αντί για $x \times y$.

Από τα αξιώματα αυτά εύκολα προκύπτει η ακόλουθη ιδιότητα:

Πρόταση 1.1. ***(Μοναδικότητα των ουδέτερων στοιχείων, αντίθετων, και αντίστροφων)*** *Τα ουδέτερα στοιχεία $0, 1$ της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ο αντίθετος κάθε αριθμού, και ο αντίστροφος κάθε αριθμού διάφορου του 0 είναι μοναδικά.*

Απόδειξη: Έστω δύο οποιαδήποτε ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης, 0 και $0'$. Τότε, θα έχουμε $0 + 0' = 0'$, αφού το 0 είναι ουδέτερο, και επίσης $0 + 0' = 0$, αφού το $0'$ είναι ουδέτερο. Άρα, $0 = 0'$, δηλαδή τα δύο ουδέτερα στοιχεία είναι ίσα, επομένως το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι μοναδικό.

Έστω τώρα πως υπάρχει x με δύο διακριτούς αντίθετους, έστω y_1 και y_2. Θα έχουμε $x + y_1 = 0$ και $x + y_2 = 0$, επομένως

$$\begin{aligned} x + y_1 = x + y_2 \Rightarrow y_1 + (x + y_1) = y_1 + (x + y_2) &\overset{A.2}{\Rightarrow} (y_1 + x) + y_1 = (y_2 + x) + y_2 \\ &\overset{A.4}{\Rightarrow} 0 + y_1 = 0 + y_2 \overset{A.3}{\Rightarrow} y_1 = y_2, \end{aligned}$$

επομένως φτάσαμε σε άτοπο.

Τα αντίστοιχα σκέλη για τον πολλαπλασιασμό αποδεικνύονται ανάλογα. (Δείτε την Άσκηση 1.1.)

■

Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* 0, *το* 1, *τον* αντίθετο ενός αριθμού και *τον* αντίστροφο ενός αριθμού διάφορου του 0.

Επίσης, παρατηρήστε ότι στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε, στην πρώτη συνεπαγωγή, την ιδιότητα $x = y \Rightarrow a + x = a + y$. Αυτή η ιδιότητα δεν είναι απόρροια κάποιου αξιώματος, αλλά της ίδιας της έννοιας της πράξης μεταξύ δύο αριθμών. Για τις ανάγκες αυτής της συζήτησης, μια πράξη σε ένα σύνολο είναι ένας κανόνας f που αντιστοιχεί, για οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) στοιχείων του συνόλου, ένα συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου $z = f(x, y)$. Επομένως, αν έχουμε $x = y$, τότε θα πρέπει και $f(a, x) = f(a, y)$, δηλαδή $a + x = a + y$, αν η πράξη είναι η πρόσθεση πραγματικών, ή $ax = ay$, αν η πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός πραγματικών.

Ορισμός 1.2. ***(Αφαίρεση και διαίρεση)*** *Συμβολίζουμε τον αντίθετο του x ως $-x$, και τον αντίστροφο ενός $x \neq 0$ ως x^{-1}. Ορίζουμε την **αφαίρεση** του y από το x και τη διαίρεση του x από το $y \neq 0$ ως*

$$x - y \triangleq x + (-y), \qquad x/y \triangleq xy^{-1}.$$

Θα γράφουμε επίσης και $x/y = \frac{x}{y}$. Παρατηρήστε πως, θέτοντας $x = 1$ στον ορισμό της διαίρεσης, έχουμε $1/y \triangleq y^{-1}$.

Οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι το μόνο σύνολο αριθμών που ικανοποιούν τα Αξιώματα Πεδίου. Άλλα γνωστά μας σύνολα που επίσης τα ικανοποιούν είναι οι ρητοί $\mathbb{Q}$ και οι μιγαδικοί $\mathbb{C}$, όχι όμως οι φυσικοί $\mathbb{N}$ και οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$ (δείτε την Άσκηση 1.2). Υπάρχουν, επίσης, πολλά παραδείγματα συνόλων που είναι εφοδιασμένα με δύο πράξεις, που και πάλι μπορούμε να καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, *που όμως είναι ορισμένες διαφορετικά από τη συνήθη πρόσθεση και τον συνήθη πολλαπλασιασμό*, έτσι ώστε και πάλι να ικανοποιούνται τα Αξιώματα Πεδίου. Όλα αυτά τα σύνολα καλούνται **πεδία** ή **σώματα**. Στα ακόλουθα παραδείγματα εξετάζουμε μια ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία πεδίων.

Παράδειγμα 1.1. (Σύνολο $\mathbf{GF}(2)$) Έστω το σύνολο $\mathbf{GF}(2) = \{0, 1\}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση $\oplus$ και τον πολλαπλασιασμό $\odot$ που ορίζονται ως εξής:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0,$$
$$0 \odot 0 = 0, \quad 0 \odot 1 = 0, \quad 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1.$$

Το σύνολο αυτό είναι πεδίο. Πράγματι, παρατηρώντας τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει πως τα 0, 1 είναι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, ότι ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, και ότι $-0 = 0$, $-1 = 1$, $1^{-1} = 1$. Για να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι προσεταιριστικές ιδιότητες και η επιμεριστική ιδιότητα, αρκεί να πάρουμε τα δύο μέλη κάθε ισότητας και να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν για κάθε έναν από τους 8 δυνατούς συνδυασμούς. Αυτό μπορείτε να το επαληθεύσετε μόνοι σας (Άσκηση 1.3).

Σχετικά με τις παραπάνω πράξεις, παρατηρήστε πως η πρόσθεση ταυτίζεται με τη συνάρτηση XOR μεταξύ bits. Επίσης, οι δύο πράξεις καλούνται πρόσθεση modulo 2 και πολλαπλασιασμός modulo 2, διότι μπορούν να ερμηνευτούν ως εξής: εκτελούμε τη συνηθισμένη πράξη (πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό, αντίστοιχα), και για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της νέας πράξης παίρνουμε το υπόλοιπο (modulo) της διαίρεσης με το 2.

Με δεδομένο ότι πρέπει τα ουδέτερα στοιχεία των δύο πράξεων να διαφέρουν, παρατηρήστε ότι δεν μπορεί να υπάρξει πεδίο με λιγότερα στοιχεία από το $\mathbf{GF}(2)$. Μπορεί μάλιστα να αποδειχτεί ότι το $\mathbf{GF}(2)$ είναι το μοναδικό πεδίο με δύο στοιχεία που υπάρχει, αλλά η απόδειξη (που, καταρχάς, περιλαμβάνει τη δευκρίνιση του τι ακριβώς σημαίνει δύο πεδία να είναι ίδια) παραλείπεται.

Παράδειγμα 1.2. ($\mathbf{GF}(5)$) Έστω το σύνολο $\mathbf{GF}(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για το οποίο έχουμε ορίσει δύο πράξεις ως εξής:

1. Την πρόσθεση modulo 5, που τη συμβολίζουμε με $\oplus$, και σύμφωνα με την οποία το $x \oplus y$ ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του $x + y$ με το 5. Ισοδύναμα,

   $$x \oplus y = x + y - 5k,$$

   όπου k είναι ο *μοναδικός* (σκεφτείτε γιατί) ακέραιος για τον οποίο $0 \leq x + y - 5k \leq 4$, και προφανώς $k \in \{0, 1\}$.

2. Τον πολλαπλασιασμό modulo 5, που τον συμβολίζουμε με $\odot$, και σύμφωνα με τον οποίο το $x \odot y$ ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του xy με το 5. Ισοδύναμα,

   $$x \odot y = xy - 5k,$$

   όπου k είναι ο (και πάλι) μοναδικός ακέραιος για τον οποίο $0 \leq xy - 5k \leq 4$, και προφανώς $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Το σύνολο $\mathbf{GF}(5)$, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις, ικανοποιεί τα Αξιώματα Πεδίου. Θα δείξουμε μέρος της απόδειξης. Η πλήρης απόδειξη ζητείται στην Άσκηση 1.4.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης προκύπτει παρατηρώντας ότι:

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x + (y + z - 5k_1) - 5k_2 = x + y + z - 5(k_1 + k_2), \\ (x \oplus y) \oplus z &= (x + y - 5k_3) + z - 5k_4 = x + y + z - 5(k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Στα παραπάνω, οι ακέραιοι $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$ είναι τέτοιοι ώστε το αντίστοιχο άθροισμα να είναι πάντοτε ανάμεσα στο 0 και το 4. Παρατηρήστε τώρα ότι υπάρχει μόνο ένας k τέτοιος ώστε το $x + y + z - 5k$ να είναι ανάμεσα στο 0 και το 4. Άρα $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, και τελικά

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό, η αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης και η επιμεριστική ιδιότητα προκύπτουν ανάλογα.

Σχετικά με την ύπαρξη ουδετέρων, είναι προφανές ότι το 0 είναι και πάλι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.

Σχετικά με την ύπαρξη αντίθετων, είναι προφανές ότι

$$0+0=0,\ \ 1+4=0,\ \ 2+3=0,$$

άρα υπάρχει αντίθετος για κάθε στοιχείο στο $\mathbf{GF}(5)$.

Σχετικά με τους αντίστροφους, με λίγες δοκιμές βρίσκουμε ότι

$$1\odot 1=1,\ \ 2\odot 3=1,\ \ 4\odot 4=1,$$

άρα όλοι οι αριθμοί εκτός του 0 έχουν αντίστροφο, αφού $1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $4^{-1}=4$.

Πράγματι, λοιπόν, το $\mathbf{GF}(5)$ είναι πεδίο. Αν, αντί να χρησιμοποιούσαμε το 5, χρησιμοποιούσαμε το 6, θα ήταν το προκύπτον σύνολο πεδίο; Δείτε σχετικά την Άσκηση 1.5. Γενικώς, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{0,1,\cdots,q-1\}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού modulo q, είναι πεδίο αν και μόνο αν το q είναι πρώτος αριθμός. Η απόδειξη παραλείπεται.

Τα παραπάνω πεδία είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα πεδίων με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, γνωστά και ως Πεδία Galois (Galois Fields), προς τιμήν του μαθηματικού Évariste Galois (1811-1832), που πρώτος τα μελέτησε (γι' αυτό και οι συμβολισμοί $\mathbf{GF}(q)$ που χρησιμοποιήσαμε). Τα εν λόγω πεδία έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές, ιδιαιτέρως σε τεχνολογίες ανάκτησης σφαλμάτων. Χρησιμοποιούνται, για παράδειγμα, στην επιδιόρθωση σφαλμάτων κατά την ανάγνωση οπτικών δίσκων, και στην ανάκτηση δεδομένων όταν ένα μέσο αποθήκευσης παθαίνει βλάβη. Μπορείτε να δείτε ένα (υποτυπώδες) παράδειγμα στην Άσκηση 1.6.

Ασκήσεις

1.1. (Μοναδικότητα ουδέτερου στοιχειού πολλαπλασιασμού και αντίστροφου) Γράψτε αναλυτικά την απόδειξη της Πρότασης 1.1 για το σκέλος του πολλαπλασιασμού.

1.2. (Αξιώματα πεδίου στα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) Προσδιορίστε ποια από τα Αξιώματα Πεδίου ισχύουν στους φυσικούς $\mathbb{N}$ και τους ακέραιους $\mathbb{Z}$.

1.3. (Απόδειξη ιδιοτήτων για το $\mathbf{GF}(2)$) Αποδείξτε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbf{GF}(2)$, όπως έχουν οριστεί στο Παράδειγμα 1.1, ικανοποιούν τις προσεταιριστικές ιδιότητες Α.2 και Α.6 και την επιμεριστική ιδιότητα Α.9, εξετάζοντας περιπτώσεις.

1.4. [$\star$] (Απόδειξη ιδιοτήτων για το $\mathbf{GF}(5)$) Αποδείξτε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbf{GF}(5)$, όπως έχουν οριστεί στο Παράδειγμα 1.2, ικανοποιούν τα Αξιώματα Πεδίου.

1.5. [Π] (Ένα σύνολο που δεν είναι πεδίο) Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0,1,2,3,4,5\}$ για τους οποίους ορίζουμε $\oplus$ την πρόσθεση modulo 6 και $\odot$ τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

1.6. [$\star$] (Πρόσθεση αρχείων) Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος δίσκος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πώς μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A, B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

1.3 Συνέπειες των Αξιωμάτων Πεδίου

Τα Αξιώματα Πεδίου έχουν μια σπουδαία ιδιότητα: ξεκινώντας από αυτά, μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές μας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα όλες τις γνωστές μας ταυτότητες, όπως την $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. Παρατηρήστε πως, αφού βασιζόμαστε μόνο στα Αξιώματα Πεδίου, ό,τι αποδείξουμε βασιζόμενοι σε αυτά ισχύει όχι μόνο για τους πραγματικούς, αλλά και για όλα τα άλλα πεδία, π.χ. τους ρητούς, τους μιγαδικούς, το $\mathbf{GF}(5)$, κτλ.

Σε αυτή την παράγραφο στόχος μας δεν είναι να κάνουμε μια εκτενή παρουσίαση αυτής της διαδικασίας, θα δείξουμε όμως περιληπτικά μέρος της. Παρατηρήστε ότι, στα ακόλουθα, σε κάθε συνεπαγωγή θα χρησιμοποιούμε είτε κάποιο Αξίωμα Πεδίου, είτε κάποια ιδιότητα που έχει ήδη αποδειχθεί. Όταν επιλύετε ασκήσεις με το ίδιο αντικείμενο, δεν πρέπει να ξεφεύγετε από αυτή τη γενική αρχή. Όπως θα δείτε, αυτό είναι εν γένει δύσκολο γιατί θέλει ένα είδος επιλεκτικής αμνησίας. Όσοι βρίσκουν αυτή τη διαδικασία εύκολη, έχουν ταλέντο στα μαθηματικά (ή στην πολιτική!)

Πρόταση 1.2. ***(Ιδιότητες που απορρέουν από τα Αξιώματα Πεδίου)*** *Τα παρακάτω ισχύουν για κάθε* $a, x, y \in \mathbb{R}$*:*

1. $a + x = a + y \Rightarrow x = y$. *Μπορούμε, δηλαδή, να απαλείψουμε ένα κοινό όρο* a *από τα δύο μέλη μιας ισότητας.*
2. *Αν* $a \neq 0$*, τότε* $ax = ay \Rightarrow x = y$. *Μπορούμε, δηλαδή, να απαλείψουμε ένα κοινό συντελεστή* $a \neq 0$ *από τα δύο μέλη μιας ισότητας.*
3. $-(-x) = x$.
4. $(x^{-1})^{-1} = x$.
5. $-(x + y) = (-x) + (-y)$.
6. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
7. $0x = 0$.
8. $x(-y) = -(xy)$.
9. $(-1)x = -x$.
10. $(-x)(-y) = xy$.

Απόδειξη:

1. Έχουμε

$$\begin{aligned} a + x = a + y &\Rightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \\ &\overset{A.2}{\Rightarrow} ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y \overset{A.4}{\Rightarrow} 0 + x = 0 + y \overset{A.3}{\Rightarrow} x = y. \end{aligned}$$

2. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.
3. Η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από τη συμμετρία στον ορισμό του αντίθετου A.4.
4. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.

5. Έχουμε

$$\begin{aligned}(x+y)+((-x)+(-y)) &\overset{A.1}{=} (y+x)+((-x)+(-y)) \overset{A.2}{=} ((y+x)+(-x))+(-y)\\ &\overset{A.2}{=} (y+(x+(-x)))+(-y) \overset{A.4}{=} (y+0)+(-y) \overset{A.3}{=} y+(-y) \overset{A.4}{=} 0\\ &\Rightarrow (x+y)+((-x)+(-y))=0,\end{aligned}$$

   από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

6. Προκύπτει ανάλογα με το προηγούμενο σκέλος.

7. Έχουμε

$$0+0x \overset{A.3}{=} 0x \overset{A.3}{=} (0+0)x \overset{A.9}{=} 0x+0x \Rightarrow 0+0x=0x+0x \Rightarrow 0=0x.$$

   Η τελευταία συνεπαγωγή προέκυψε από το Σκέλος 1.

8. Έχουμε

$$x(-y)+xy \overset{A.9}{=} x((-y)+y) \overset{A.4}{=} x0=0.$$

   Η τελευταία ιδιότητα προκύπτει από το Σκέλος 7.

9. Προκύπτει από το Σκέλος 8 για $y=1$.

10. Έχουμε

$$(-x)(-y)=-((-x)y)=-(-(xy))=xy.$$

   Η πρώτη ισότητα προέκυψε από το Σκέλος 8, όπως και η δεύτερη. Η τρίτη ισότητα προέκυψε από το Σκέλος 3. ■

Αν καταλάβατε την λογική των παραπάνω αποδείξεων, τότε, με πολλή υπομονή, μπορείτε να αποδείξετε όσες ακόμα ιδιότητες των πραγματικών αριθμών θέλετε, βασιζόμενοι μόνο στα Αξιώματα Πεδίου. Μερικές ακόμα ιδιότητες δίνονται στην Άσκηση 1.7. Φροντίστε, μόνο, στις αποδείξεις σας, να μην χρησιμοποιείτε ιδιότητες που δεν έχετε αποδείξει ακόμα. Είναι δυσκολότερο από ό,τι φαίνεται!

Κλείνουμε την παράγραφο με τον ορισμό των ακεραίων δυνάμεων πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 1.3. ***(Ακέραιες δυνάμεις)***

1. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και* $n \in \mathbb{N}^*$, *ορίζουμε* $a^n \triangleq \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$. *Το* a *καλείται* ***βάση***, *το* n *καλείται* ***εκθέτης***, *και το* a^n *καλείται η* n*-οστή* ***δύναμη*** *του* a.

2. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}^*$ *και* $n \in \mathbb{N}^*$, *ορίζουμε* $x^{-n}=(x^{-1})^n$.

3. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *ορίζουμε* $x^0=1$.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης ζητείται στην Άσκηση 1.8.

Πρόταση 1.3. ***(Ιδιότητες ακεραίων δυνάμεων)*** *Για κάθε* $x,y \in \mathbb{R}$ *και για κάθε* $n,m \in \mathbb{Z}$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$x^n x^m = x^{n+m}, \qquad x^n y^n = (xy)^n, \quad (x^n)^m = x^{mn}.$$

(Αν κάποιο x,y *υψώνεται σε αρνητικό εκθέτη, εννοείται πως είναι διάφορο του μηδενός.)*

Στη συνέχεια, θα θεωρούμε γνωστές όλες τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών οι οποίες εμπλέκουν ισότητες και οι οποίες μάς είναι γνωστές από το Λύκειο γνωστές. Οι ιδιότητες που εμπλέκουν ανισότητες είναι το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

Ασκήσεις

1.7. [⋆⋆] (Ιδιότητες πεδίου) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Εννοείται ότι αν για κάποιο αριθμό εμφανίζεται ο αντίστροφός του, ο αριθμός αυτός είναι διάφορος του 0. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο τα Αξιώματα Πεδίου και ιδιότητες που εμφανίζονται σε αυτή την παράγραφο και έχουν ήδη αποδειχθεί. Σε κάθε ισότητα ή ισοδυναμία που γράφετε, αναφέρετε το αξίωμα ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.

1. Αν $xy = 0$, τότε είτε το $x = 0$, είτε το $y = 0$, είτε $x = y = 0$.
2. $x(y - z) = xy - xy$.
3. $(x + y)/z = x/z + y/z$.
4. $(x/y)/(z/w) = (xw)/(yz)$.
5. $(xy)/(zw) = y/z$
6. $(x/z) + (y/w) = (xw + yz)/(zw)$.
7. $x^{-n} = (x^n)^{-1}$.

1.8. [⋆] (Ιδιότητες ακεραίων δυνάμεων) Αποδείξτε την Πρόταση 1.3.

1.9. (Διωνυμικό Θεώρημα) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το k **παραγοντικό** ως

$$k! \triangleq \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Ορίζουμε, επίσης, τον **διωνυμικό συντελεστή**

$$\binom{N}{n} \triangleq \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Να αποδείξετε το **Διωνυμικό Θεώρημα**:

$$(x + y)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n y^{N-n},$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

1.10. (Ταυτότητα διαφοράς δυνάμεων) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.11. (Ταυτότητα αθροίσματος) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

όπου $N \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.12. (Ταυτότητα αθροίσματος τετραγώνων) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

όπου $N \in \mathbb{N}^*$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όλες τις γνωστές σας ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

1.13. Δώστε ένα απλό τύπο για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{N} n^3$.

1.4 Αξιώματα Διάταξης

Αξιώματα Διάταξης: *Υπάρχει το υποσύνολο $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$, που καλείται το σύνολο των **θετικών** πραγματικών αριθμών, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

A.10 (Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση) Αν $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $x + y \in \mathbb{R}_+^*$.

A.11 (Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό) Αν $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, τότε $xy \in \mathbb{R}_+^*$.

A.12 (Κανόνας της Τριχοτόμησης) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμβαίνει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα: είτε $x \in \mathbb{R}_+^*$, είτε $-x \in \mathbb{R}_+^*$, είτε $x = 0$.

Παρατηρήστε ότι οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι το μόνο πεδίο που ικανοποιεί τα Αξιώματα Διάταξης. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι ρητοί αριθμοί, όχι όμως και οι μιγαδικοί. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ουσιαστικά τα Αξιώματα Διάταξης σημαίνουν ότι μπορούμε να βάλουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς σε μια σειρά, επομένως, διαισθητικά μιλώντας, αυτοί είναι ένα μονοδιάστατο σύνολο. Αυτό μπορεί να γίνει και για τους ρητούς, όχι όμως και για τους μιγαδικούς, που ουσιαστικά είναι ένα δισδιάστατο σύνολο.

Τα Αξιώματα Διάταξης είναι σημαντικά στη θεωρία μας διότι αρκούν, μαζί με τα Αξιώματα Πεδίου, για να αποδείξουμε όλες τις γνωστές μας ιδιότητες που εμπλέκουν ισότητες *και* ανισότητες. Θα αποδείξουμε αρκετές από αυτές ιδιότητες στη συνέχεια, πρώτα όμως θα ορίσουμε μερικές επιπλέον έννοιες:

Ορισμός 1.4. ***(Αρνητικοί, ανισότητες και απόλυτη τιμή)*** *Ορίζουμε τα ακόλουθα:*

1. *Ένας αριθμός x καλείται **αρνητικός** αν ο $-x$ είναι θετικός. Επομένως, από το Αξίωμα A.12 έχουμε ότι κάθε αριθμός x είναι ή θετικός ή αρνητικός ή το 0.*
2. *Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_-^*$ το σύνολο των αρνητικών αριθμών.*
3. *$x > y$ σημαίνει ότι ο $x - y$ είναι θετικός.*
4. *(Απόρροια του προηγούμενου σκέλους με $y = 0$) $x > 0$ σημαίνει ότι ο x είναι θετικός. Επομένως, $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$.*
5. *$x < y$ σημαίνει ότι $y > x$.*
6. *(Απόρροια του προηγούμενου σκέλους με $y = 0$) $x < 0$ σημαίνει ότι ο x είναι αρνητικός. Επομένως, $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$.*
7. *$x \geq y$ σημαίνει ότι $x = y$ ή $x > y$.*

8. $x \leq y$ *σημαίνει ότι* $y \geq x$.

9. *Η* ***απόλυτη τιμή*** $|a|$ *ενός πραγματικού* a *ορίζεται ως*

$$|a| \triangleq \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Πρόταση 1.4. *(Συνέπειες Αξιωμάτων Διάταξης)*

1. $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.
2. $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
3. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$, *ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:* $x < y$, $x = y$, $x > y$.
4. *Αν* $x < y$ *και* $z < w$, *τότε* $x + z < y + w$.
5. *Αν* $x < y$ *και* $w > 0$, *τότε* $wx < wy$.
6. *Αν* $x < y$ *και* $w < 0$, *τότε* $wx > wy$.
7. *Αν* $x < y$ *τότε* $-x > -y$.
8. *Για κάθε* $x \neq 0$, $x^2 > 0$.
9. $1 > 0$.
10. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

Απόδειξη:

1. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των αρνητικών αριθμών.

2. Σχετικά με την ευθεία συνεπαγωγή, έστω πως $x > 0$. Τότε $-(-x)) > 0$, επομένως, από τον ορισμό των αρνητικών , ο $-x$ είναι αρνητικός, δηλαδή $-x < 0$. Αντιστρόφως, αν $-x < 0$, και πάλι από τον ορισμό των αρνητικών, ο $-(-x)$ είναι θετικός, δηλαδή $x > 0$.

3. Έστω ο $x - y$. Λόγω του Κανόνα της Τριχοτόμησης, υπάρχουν ακριβώς τρία ενδεχόμενα: Αν $x - y$ θετικός, τότε εξ ορισμού $x > y$. Αν $x - y = 0$ τότε και $x = y$. Τέλος, αν $x - y$ αρνητικός, τότε ο $y - x$ θετικός, δηλαδή $y > x$.

4. Αφού $x < y$ θα έχουμε και $y - x > 0$. Ομοίως, αφού $z < w$ θα έχουμε και $w - z > 0$. Από το Αξίωμα Α.10, προκύπτει ότι ο $(y - x) + (w - z) = (y + w) - (x + z)$ είναι θετικός, δηλαδή $y + w > x + z$.

5. Έχουμε $y - x > 0$ και $w > 0$, άρα από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $w(y - x) > 0 \Rightarrow wy - wx > 0 \Rightarrow wx < wy$.

6. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $y - x > 0$ και $w < 0 \Rightarrow -w > 0$, άρα από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $(-w)(y - x) > 0 \Rightarrow -wy + wx > 0 \Rightarrow wx > wy$.

7. Προκύπτει από το Σκέλος 6 για $w = -1$.

8. Αφού $x \neq 0$, από το Αξίωμα Α.12 υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, είτε $x > 0$, είτε $x < 0$. Στην πρώτη περίπτωση, από το Αξίωμα Α.11 προκύπτει ότι $x^2 = x \cdot x > 0$. Στη δεύτερη περίπτωση, $x < 0 \Rightarrow (-x) > 0$ και πάλι από το Αξίωμα Α.11 έχουμε $(-x)(-x) > 0$. Όμως, $(-x)(-x) = x^2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

9. Προκύπτει από το Σκέλος 8, αφού $1 = 1 \cdot 1$.

10. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Αν $x \neq 0$, από το Σκέλος 8 έχουμε $x^2 > 0$, επομένως και $x^2 \geq 0$. Αν $x = 0$, τότε $x^2 = 0$, οπότε και πάλι $x^2 \geq 0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Από εδώ και στο εξής, όπως κάναμε ήδη για τα Αξιώματα Πεδίου, θεωρούμε γνωστές όλες τις ιδιότητες που έχουμε μάθει στο Λύκειο που εμφανίζουν ανισότητες.

Ασκήσεις

1.14. [$\star\star$] (Ιδιότητες ανισοτήτων) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας όλες τις ιδιότητες που προκύπτουν από τα Αξιώματα Πεδίου (ακόμα και αν δεν τις έχουμε αποδείξει), τα Αξιώματα Διάταξης και όσες ιδιότητες απορρέουν από τα Αξιώματα Διάταξης που έχουμε αποδείξει.

1. Αν $x > 0$ και $y < 0$, τότε $xy < 0$.

2. Αν $x > 0$, τότε $x^{-1} > 0$.

3. Αν $x < 0$, τότε $x^{-1} < 0$.

4. Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.

5. Αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.

6. Αν $0 < x < y$ τότε $x^{-1} > y^{-1} > 0$.

7. Αν $x < y$ τότε $x < \frac{x+y}{2} < y$.

1.15. [$\star\star$] (Ιδιότητες δυνάμεων) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας όλες τις ιδιότητες που προκύπτουν από τα Αξιώματα Πεδίου (ακόμα και αν δεν τις έχουμε αποδείξει), τα Αξιώματα Διάταξης, και όσες ιδιότητες απορρέουν από τα Αξιώματα Διάταξης που έχουμε αποδείξει.

1. Έστω $n \in N^*$ περιττός. Να δείξετε ότι $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$.

2. Έστω $n \in N^*$ άρτιος. Να δείξετε ότι $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$ και ότι $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^n > x_2^n$.

1.5 Διαστήματα

Έχοντας ορίσει τις ανισότητες, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια του διαστήματος.

Ορισμός 1.5. *(Διαστήματα)*

1. *Καλούμε* ***διάστημα*** *κάθε σύνολο S που έχει την ιδιότητα αν $x \in S$ και $y \in S$ με $x < y$, τότε και $z \in S$ για οποιαδήποτε z τέτοιο ώστε $x \leq z \leq y$.*

2. *Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες συντομογραφίες:*

$$\begin{aligned}
(a,b) &\triangleq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad [a,b] \triangleq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\
(a,b] &\triangleq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad [a,b) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
(a,\infty) &\triangleq \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad (-\infty,b) \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
[a,\infty) &\triangleq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \quad (-\infty,b] \triangleq \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\
(-\infty,\infty) &\triangleq \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$.

3. *Τα **άκρα** του (a,b) ορίζονται ως τα a (**αριστερό άκρο**) και b (**δεξιό άκρο**). Παρόμοιοι ορισμοί ισχύουν και για τα άλλα διαστήματα του Σκέλους 2.*

4. *Τα $(a,b),\ (a,\infty),\ (-\infty,b),\ (-\infty,\infty)$ καλούνται **ανοικτά**.*

5. *Τα $[a,b],\ [a,\infty),\ (-\infty,b],\ (-\infty,\infty)$ καλούνται **κλειστά**.*

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα *μόνα* διαστήματα που υπάρχουν είναι αυτά των μορφών που αναφέρονται στο Σκέλος 2. Παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση που $a = b$, ορισμένα εξ αυτών είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολα. Δείτε, σχετικά, την Άσκηση 1.27.

Τα **σύμβολα του απείρου** ∞ και $-\infty$ προς το παρόν χρησιμοποιούνται ως ένας πολύ διαισθητικός τρόπος για να συμβολίσουμε ότι ένα διάστημα δεν είναι άνω ή κάτω (αντίστοιχα) φραγμένο. Στο επόμενο κεφάλαιο θα βρούμε και άλλες χρήσεις γι' αυτά. Σε κάθε περίπτωση, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι *δεν* είναι αριθμοί! Σχετικά με τους συμβολισμούς, θα αποφεύγουμε να γράφουμε $+\infty$. Το ∞ θα εννοείται πως είναι το $+\infty$, όπως ακριβώς και το 5 εννοείται ότι είναι το $+5$.

1.5.1 Ανοικτά και Κλειστά Σύνολα

Οι πολύ παρατηρητικοί θα πρόσεξαν ότι το $(-\infty,\infty)$ ορίστηκε *και* ανοιχτό *και* κλειστό. (Μάλιστα, ορισμένοι το χαρακτηρίζουν «clopen», από τις λέξεις closed και open.) Αυτό οφείλεται στον τρόπο που ορίζονται γενικότερα τα ανοικτά και τα κλειστά *σύνολα*. Δείτε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 1.6. ***(Ανοικτά και κλειστά σύνολα)*** *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Ένα σημείο $x \in S$ καλείται **εσωτερικό σημείο** του S αν υπάρχει ανοικτό διάστημα (a,b) τέτοιο ώστε $x \in (a,b)$ και $(a,b) \subseteq S$.*

2. *Τα εσωτερικά σημεία ενός συνόλου S απαρτίζουν το **εσωτερικό** του $\operatorname{int} S$.*

3. *Καλούμε ένα σύνολο S **ανοικτό** όταν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά,*

4. *Καλούμε ένα σύνολο S **κλειστό** όταν το συμπλήρωμα του S^c είναι ανοικτό.*

5. *Αν το c είναι εσωτερικό σημείο ενός συνόλου S, τότε το S καλείται **γειτονιά** του c.*

Επομένως, το εσωτερικό του διαστήματος $[a,b]$ είναι το $\operatorname{int}[a,b] = (a,b)$. Αντίστοιχα, $\operatorname{int}(a,b] = (a,b)$, $\operatorname{int}[a,b) = (a,b)$, $\operatorname{int}(-\infty,b] = -\infty,b]$, κτλ.

Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό που της έχουμε δώσει, η γειτονιά δεν χρειάζεται να είναι διάστημα. Πάντως, πρέπει να σημειώσουμε το ακόλουθο: συχνά στη συνέχεια θα λέμε ότι υπάρχει μια γειτονιά S ενός σημείου c τέτοια ώστε να ισχύει μια ιδιότητα για κάθε $x \in S$ (για παράδειγμα, μια συνάρτηση f είναι παντού θετική στην S). Μπορούμε τότε, πάντοτε, να υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο (a, b) με $c \in (a, b)$ ώστε να ισχύει αυτή η ιδιότητα για κάθε $x \in (a, b)$. Αυτό ισχύει διότι το c είναι εσωτερικό σημείο της S, επομένως, εξ ορισμού του εσωτερικού σημείου, υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq S$ τέτοιο ώστε $c \in (a, b)$.

Οι παραπάνω ορισμοί ίσως φαίνονται περισσότερο μυστηριώδεις από όσο χρειάζεται, αλλά έχουν το πλεονέκτημα ότι γενικεύονται άμεσα και σε άλλα σύνολα πέραν των πραγματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα στο σύνολο $\mathbb{R}^n$ των διατεταγμένων n-άδων, τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C}$, κτλ.

Παρατηρήστε πως, στον ορισμό του εσωτερικού σημείου, η απαίτηση το διάστημα (a, b) να είναι ανοικτό είναι ουσιώδης, διαφορετικά με λίγη σκέψη μπορείτε να δείτε ότι ο ορισμός του ανοικτού συνόλου δεν είναι συμβατός με την ειδική περίπτωση του ανοικτού διαστήματος που ήδη έχουμε δώσει.

Βάσει του παραπάνω ορισμού, ένα σύνολο S είναι ανοικτό αν, για οποιοδήποτε σημείο x εντός του συνόλου, μπορούμε να βρούμε μια ανοικτή γειτονιά (a, b) με $a < x < b$ η οποία είναι εντός του συνόλου S, δηλαδή όλα τα στοιχεία x του συνόλου είναι μακριά από τα άκρα του.

Έχοντας τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να δείξουμε γιατί το $\mathbb{R}$ είναι και ανοικτό και κλειστό. Είναι καταρχάς ανοικτό, γιατί για κάθε σημείο x προφανώς υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά $(x-1, x+1) \subseteq \mathbb{R}$. Είναι όμως *και* κλειστό, διότι το συμπλήρωμά του, που είναι το κενό σύνολο είναι ανοικτό. Πράγματι, για κάθε σημείο $x \in \emptyset$, υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά $I \subset \emptyset$. Επίσης, κάθε σημείο $x \in \emptyset$ φοράει κόκκινο πουλόβερ, του αρέσουν οι λεμονάδες, κτλ. Όλα αυτά ισχύουν *αυτομάτως*, διότι το κενό σύνολο δεν έχει *κανένα* σημείο!

Ενδεχομένως να αισθάνεστε εξαπατημένοι με το τελευταίο επιχείρημα. Σε κάθε περίπτωση, είναι απολύτως ορθό και περισσότερα επί του θέματος μπορείτε να μάθετε σε μαθήματα Λογικής. Το καλό είναι ότι, αν δεν έχετε κανένα αυτοκίνητο, μπορείτε να δηλώσετε στους φίλους σας, χωρίς τύψεις, ότι, για κάθε αυτοκίνητο που έχετε, του έχετε εγκαταστήσει εκτινασσόμενα καθίσματα.

Ασκήσεις

1.16. (Το κενό σύνολο είναι clopen) Να δείξετε ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι και ανοικτό και κλειστό.

1.17. (Εσωτερικό συνόλων) Προσδιορίστε το εσωτερικό των παρακάτω συνόλων. Ποια από αυτά είναι ανοικτά;

$$(0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}-\mathbb{Z}.$$

1.6 Supremum και Infimum

Σε αυτή την παράγραφο θα σταματήσουμε να προσπαθούμε να ξεχάσουμε αυτά που ξέραμε και θα προσπαθήσουμε να μάθουμε κάτι καινούργιο, και συγκεκριμένα τις έννοιες του supremum και του infimum ενός συνόλου. Οι έννοιες αυτές είναι, κατά κάποιο τρόπο, γενικεύσεις των αντίστοιχων εννοιών του μέγιστου και του ελάχιστου στοιχείου ενός συνόλου.

1.6.1 Supremum και Infimum

Ορισμός 1.7. ***(Φράγματα)*** *Έστω μη κενό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \leq u$ για κάθε $x \in S$, τότε το u καλείται* ***άνω φράγμα*** *του S και το S* ***άνω φραγμένο****. Αν, επιπλέον, $u \in S$, το u καλείται το* ***μέγιστο στοιχείο (ή maximum)*** *του S, και γράφουμε $u = \max S$.*

2. *Αντίστοιχα αν υπάρχει $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \geq l$ για κάθε $x \in S$, τότε το l καλείται* ***κάτω φράγμα*** *του S και το S* ***κάτω φραγμένο****. Αν, επιπλέον, $l \in S$, το l καλείται το* ***ελάχιστο στοιχείο*** *(ή* ***minimum****) του S, και γράφουμε $l = \min S$.*

3. *Τα άνω και κάτω φράγματα καλούνται από κοινού* ***φράγματα****. Αν ένα σύνολο είναι και άνω φραγμένο, και κάτω φραγμένο, καλείται* ***φραγμένο****.*

Παρατηρήστε ότι μιλάμε για *το* μέγιστο και *το* ελάχιστο στοιχείο, γιατί αυτά πρέπει να είναι μοναδικά. Δείτε σχετικά την Άσκηση 1.18.

Ο λόγος που ορίζουμε τα supremum και infimum ενός συνόλου είναι ότι υπάρχουν σύνολα που, καίτοι φραγμένα άνω (αντίστοιχα, φραγμένα κάτω), δεν έχουν μέγιστο στοιχείο (αντίστοιχα, ελάχιστο στοιχείο). Για να κατανοήσουμε το πρόβλημα, ας εξετάσουμε το σύνολο $(0, 1)$ όλων των αριθμών $x : 0 < x < 1$. Ποιο είναι το μέγιστο στοιχείο του; Μια συνηθισμένη (λάθος) απάντηση είναι ότι αυτό είναι το 1. Η απάντηση είναι λάθος διότι το μέγιστο στοιχείο ενός συνόλου πρέπει να ανήκει σε αυτό (δείτε ξανά τον ορισμό!), κάτι που δεν ισχύει για το 1 και το σύνολο $(0, 1)$. Μια άλλη συνηθισμένη, επίσης λάθος, απάντηση είναι ότι το μέγιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι ο αριθμός $0.9999\ldots$, όπου το πλήθος των 9 είναι άπειρο. Ο αριθμός αυτός είναι όμως το 1, και άρα επαναλαμβάνεται το προηγούμενο λάθος. (Δείτε την Άσκηση 1.19.) Μια ακόμα συνηθισμένη λάθος απάντηση είναι ότι το μέγιστο στοιχείο *τείνει* στο 1. Αυτή η απάντηση είναι ακόμα πιο λάθος, καθώς το ζητούμενο είναι ένας αριθμός, ο οποίος δεν μπορεί να *τείνει* κάπου. Μόνο οι συναρτήσεις και οι ακολουθίες *τείνουν*, όπως γνωρίζουμε από το Λύκειο και θα θυμηθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τελικά, η απάντηση είναι ότι *δεν υπάρχει* μέγιστο στοιχείο γι' αυτό το σύνολο. Υπάρχει, πάντως, ένας αριθμός που, αν και δεν είναι μέγιστο στοιχείο, εντούτοις ικανοποιεί τη διαίσθησή μας ως ένα καλό υποκατάστατο. Αυτός ο αριθμός είναι, βέβαια, το 1. Τι ιδιαίτερο έχει αυτός ο αριθμός; Δεν είναι το μέγιστο στοιχείο (που, όπως είπαμε, δεν υπάρχει) αλλά ένα άνω φράγμα. Είναι, όμως, και το ελάχιστο, δηλαδή το *μικρότερο* άνω φράγμα. Καταλήγουμε, λοιπόν, στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.8. ***(Supremum, infimum)*** *Ένας αριθμός καλείται* ***ελάχιστο άνω φράγμα*** *ή* ***supremum*** *ενός μη κενού συνόλου S, και συμβολίζεται $\sup S$ αν:*

1. *Το $\sup S$ είναι άνω φράγμα του S, και*

2. *Είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή κανένας αριθμός $x < \sup S$ δεν είναι άνω φράγμα του S.*

Αντίστοιχα, ένας αριθμός καλείται ***μέγιστο κάτω φράγμα*** *ή* ***infimum*** *ενός μη κενού συνόλου S, και συμβολίζεται $\inf S$ αν:*

1. *Το $\inf S$ είναι κάτω φράγμα του S, και*

2. *Είναι το μέγιστο κάτω φράγμα, δηλαδή κανένας αριθμός $x > \inf S$ δεν είναι κάτω φράγμα του S.*

Για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός είναι ελάχιστο άνω φράγμα, πρέπει να ακολουθήσουμε την οδό που σαφώς προσδιορίζει ο ορισμός: πρώτον, βρίσκουμε όλα τα άνω φράγματα, και, δεύτερον, επιλέγουμε το μικρότερο από αυτά. Ομοίως, για να αποδείξουμε ότι ένας αριθμός είναι μέγιστο κάτω φράγμα, πρώτον, βρίσκουμε όλα τα κάτω φράγματα, και, δεύτερον, επιλέγουμε το μεγαλύτερα από αυτά. Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου.

Παράδειγμα 1.3. (Παραδείγματα supremum και infimum) Θα προσδιορίσουμε το supremum και το infimum ορισμένων χαρακτηριστικών συνόλων.

1. Έστω, καταρχάς, το $(0,1)$. Τα άνω φράγματα του $(0,1)$ απαρτίζουν το σύνολο $[1,\infty)$. Ο μικρότερος από αυτούς τους αριθμούς είναι ο 1, επομένως $\sup(0,1)=1$. Παρομοίως, τα κάτω φράγματα του $(0,1)$ είναι το σύνολο $(-\infty,0]$. Το μέγιστο από αυτά είναι το 0, επομένως, $\inf(0,1)=0$. Παρατηρήστε πως αυτό το σύνολο δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο.

2. Ακριβώς τους ίδιους συλλογισμούς μπορούμε να ακολουθήσουμε για το διάστημα $[0,1]$, καταλήγοντας στο ότι και για αυτό $\sup[0,1]=1$ και $\inf[0,1]=0$. Όμως, γι' αυτό το διάστημα υπάρχουν επίσης το μέγιστο $\max[0,1]=1$ και το ελάχιστο $\min[0,1]=0$, κάτι που δεν ισχύει για το προηγούμενο διάστημα.

3. Παρατηρήστε ότι οι έννοιες του supremum και του infimum είναι ορισμένες για μη κενά σύνολα, άρα αυτά δεν υπάρχουν στην περίπτωση του κενού συνόλου $\emptyset$.

4. Έστω το σύνολο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο των άνω φραγμάτων του $\mathbb{R}$ είναι το κενό σύνολο, το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Επομένως, δεν υπάρχει supremum για το $\mathbb{R}$. Παρόμοια προκύπτει πως δεν υπάρχει και infimum.

5. Έστω το σύνολο $A=\left\{\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \dots\right\}$. Είναι προφανές ότι $\sup A=\max A=\frac{1}{2}$. Σχετικά με το infimum του A, παρατηρήστε ότι όλοι οι αριθμοί στο διάστημα $(-\infty,0]$ είναι κάτω φράγματα, αφού αν $x\le 0$ τότε σίγουρα και $x\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ για κάθε n. Από την άλλη, για οποιονδήποτε αριθμό $x>0$ έχουμε $x>\left(\frac{1}{2}\right)^n$ για κάποιο n, άρα αν $x>0$, ο x δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα, $\inf A=0$. Παρατηρήστε πως δεν υπάρχει το $\min A$. Πράγματι, αν υπήρχε, θα ήταν της μορφής $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ και κάποιο k, και έχουμε άτοπο διότι το $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ μικρότερο από το υποτιθέμενο ελάχιστο.

6. Έστω το $B=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Προφανώς $\sup B=\max B=\sqrt{2}$ και $\inf B=\min B=-\sqrt{2}$.

7. Ας αλλάξουμε λίγο το προηγούμενο σύνολο, εξετάζοντας τώρα την τομή $C=B\cap\mathbb{Q}$. Και πάλι, $\sup C=\sqrt{2}$ και $\inf C=-\sqrt{2}$. Όμως τώρα,επειδή τα $\pm\sqrt{2}$ είναι άρρητοι, δεν ανήκουν στο C, και, επομένως, δεν υπάρχουν τα $\max C$, $\min C$.

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, *όλα* τα μη κενά και φραγμένα άνω σύνολα είναι βέβαιο ότι έχουν supremum! Ομοίως, *όλα* τα μη κενά και φραγμένα κάτω σύνολα είναι βέβαιο ότι έχουν infimum. Αυτές οι ιδιότητες δεν αποδεικνύονται από τα αξιώματα που έχουμε ήδη παρουσιάσει, αλλά πρέπει να υποτεθούν αξιωματικά.

1.6.2 Συμβάσεις

Βάσει του παραπάνω ορισμού, τα μη φραγμένα άνω σύνολα δεν έχουν supremum. Παρόλα αυτά, συχνά γίνεται η σύμβαση να γράφουμε $\sup S=\infty$, όταν το S δεν είναι φραγμένο άνω. Ο λόγος που γίνεται η σύμβαση αυτή είναι ότι αν το S δεν είναι φραγμένο άνω, κανένας πραγματικός αριθμός δεν φράσσει το σύνολο εκτός του «αριθμού» ∞, επομένως αυτός είναι και το ελάχιστο άνω φράγμα. Επειδή, όμως, το ∞ αυστηρά δεν είναι αριθμός, μόνο κατά σύμβαση μπορεί να ισχύει το $\sup S=\infty$. Ομοίως, τα μη φραγμένα κάτω σύνολα δεν έχουν infimum, αλλά συχνά γίνεται η σύμβαση να γράφουμε $\inf S=-\infty$, όταν το S δεν είναι φραγμένο κάτω. Πράγματι, αν ένα σύνολο δεν είναι φραγμένο κάτω, τότε ο μόνος «αριθμός» που φράσσει το σύνολο αυτό είναι το $-\infty$, άρα αυτός είναι και το μέγιστο κάτω φράγμα.

Επιπλέον, το κενό σύνολο $\emptyset$ δεν έχει supremum και infimum, αν και μερικές φορές γράφουμε, επίσης κατά σύμβαση, $\sup\emptyset=-\infty$ και $\inf\emptyset=\infty$. Μπορούμε να δικαιολογήσουμε αυτές τις συμβάσεις ως εξής: *κάθε* αριθμός είναι μεγαλύτερος από *όλα* τα στοιχεία του κενού συνόλου. Αυτό ισχύει αυτομάτως διότι το κενό σύνολο δεν έχει στοιχεία! Επομένως, ο μόνος «αριθμός» που μπορεί να είναι το ελάχιστο *όλων* αυτών των άνω φραγμάτων είναι το $-\infty$. Ανάλογα, *κάθε* αριθμός είναι μικρότερος από *όλα* τα στοιχεία του κενού συνόλου. Και πάλι αυτό ισχύει αυτομάτως. Επομένως, ο μόνος «αριθμός» που μπορεί να είναι το μέγιστο *όλων* αυτών των κάτω φραγμάτων είναι το ∞.

Πολλές από τις ιδιότητες που θα παρουσιάσουμε θα ισχύουν και όταν κάποια από τα supremum και infimum που αναφέρουμε είναι $\pm\infty$. Πάντως, για λόγους απλότητας, στα επόμενα, όταν θα αναφερόμαστε στο supremum (infimum) ενός συνόλου, θα υπονοείται πάντα ότι το σύνολο αυτό είναι μη κενό και φραγμένο άνω (κάτω) και επομένως το supremum (infimum) είναι πραγματικός αριθμός, εκτός αν ρητώς αναφέρουμε ότι χρησιμοποιούμε τις παραπάνω συμβάσεις.

1.6.3 Ιδιότητες των Supremum και Infimum

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, κάποιες βασικές ιδιότητες των supremum και infimum.

Πρόταση 1.5. ***(Μοναδικότητα supremum/infimum)*** *Το supremum και το infimum ενός συνόλου, αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.*

Απόδειξη: Πράγματι, έστω πως ένα σύνολο A έχει δύο supremum, έστω S_1 και S_2, με $S_1 < S_2$. Τότε έχουμε άτοπο, διότι το S_1, ως ελάχιστο άνω φράγμα, είναι άνω φράγμα, και είναι μάλιστα μικρότερο από το S_2 που και αυτό είναι *ελάχιστο* άνω φράγμα. Η απόδειξη για το infimum είναι αντίστοιχη. ■

Πρόταση 1.6. ***(Maximum=supremum, minimum=infimum)*** *Αν υπάρχει το maximum ενός συνόλου, τότε υπάρχει και το supremum και ταυτίζονται. Αντίστοιχα, αν υπάρχει το minimum ενός συνόλου,τότε υπάρχει και το infimum και ταυτίζονται.*

Απόδειξη: Έστω σύνολο A με maximum το $M = \max A$. Εξ ορισμού, το M είναι άνω φράγμα. Είναι όμως και το ελάχιστο άνω φράγμα. Πράγματι, αν υπήρχε μικρότερο άνω φράγμα $M' < M$, τότε θα είχαμε άτοπο διότι το M, ως στοιχείο του συνόλου, οφείλει να ικανοποιεί την $M \leq M'$. ■

Πρόταση 1.7. ***(Ιδιότητα supremum/infimum)***

1. *Έστω σύνολο S με supremum $\sup S$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x > \sup S - \epsilon$.*
2. *Έστω σύνολο S με infimum $\inf S$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $x < \inf S + \epsilon$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο σκέλος, καθώς το δεύτερο σκέλος προκύπτει ανάλογα (δείτε την Άσκηση 1.21). Θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα, και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν πως υπάρχει κάποιο ϵ για το οποίο δεν μπορούμε να βρούμε $x \in S$ τέτοιο ώστε $x > \sup S - \epsilon$, δηλαδή για κάθε $x \in S$ ισχύει το ανάποδο, $x \leq \sup S - \epsilon$. Σε αυτή την περίπτωση, καταφέραμε να βρούμε ένα νέο άνω φράγμα για το S, και συγκεκριμένα το $\sup S - \epsilon$, το οποίο είναι μικρότερο του $\sup S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι το $\sup S$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του S. ■

Πρόταση 1.8. ***(Supremum/infimum υποσυνόλων)*** *Έστω δύο σύνολα A, B με $A \subseteq B$.*

1. *Αν υπάρχουν τα $\sup A$, $\sup B$, τότε $\sup A \leq \sup B$.*
2. *Αν υπάρχουν τα $\inf A$, $\inf B$, τότε $\inf A \geq \inf B$.*

Απόδειξη: Και πάλι, θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο σκέλος, καθώς το δεύτερο σκέλος προκύπτει ανάλογα (δείτε την Άσκηση 1.20). Θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα, και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Έστω λοιπόν πως $\sup A > \sup B$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτά τα δύο supremum που ανήκει μεν στο A, όχι όμως και στο υπερσύνολό του B, δημιουργώντας έτσι άτοπο. Αναλυτικά, έστω $h = (\sup A - \sup B)/2$. Από την Πρόταση 1.7 προκύπτει ότι υπάρχει $x \in A$ με $x > \sup A - h$. Όμως,

$$x > \sup A - h = \sup A - \frac{\sup A - \sup B}{2} = \frac{\sup A + \sup B}{2} > \sup B \Rightarrow x > \sup B.$$

Αφού $x > \sup B$, το x δεν ανήκει στο B, αφού το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του B. Το x όμως ανήκει στο A που είναι υποσύνολο του B. Έχουμε λοιπόν άτοπο. ■

Παράδειγμα 1.4. (Σύγκριση συνόλων) Έστω μη κενά σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Αν για κάθε $a \in A$, και για κάθε $b \in B$, έχουμε $a \leq b$, τότε θα δείξουμε ότι το A έχει supremum, το B έχει infimum, και $\sup A \leq \inf B$.

Πράγματι, το A είναι μη κενό και φραγμένο άνω από κάποιο οποιοδήποτε $b \in B$, άρα έχει supremum. Ομοίως, το B είναι μη κενό και φραγμένο κάτω από κάποιο οποιοδήποτε $a \in A$, άρα έχει infimum. Έστω τώρα ότι $\sup A > \inf B$. Άρα θα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\sup A = \inf B + \epsilon$. Όμως από την κατασκευή του supremum και του infimum, θα υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$, με $a > \sup A - \frac{\epsilon}{2}$, $b < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. Άρα, $a - b > \sup A - \inf B - \epsilon = 0 \Rightarrow a > b$, που είναι άτοπο εξ υποθέσεως. Άρα, $\sup A \leq \inf B$.

1.6.4 Αρνήσεις Προτάσεων

Στις παραπάνω αποδείξεις χρειάστηκε, σε πολλές περιπτώσεις, να δημιουργήσουμε την άρνηση P^c μιας πρότασης P, δηλαδή μια πρόταση P^c που ισχύει αν και μόνο αν δεν ισχύει η P. Η θεωρία βάσει της οποίας μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες προτάσεις είναι πολύ πλούσια, και μια αναλυτική εξέτασή της ξεφεύγει από τους σκοπούς μας. Δυστυχώς, δεν υπάρχει κάποια απλή μεθοδολογία για να δημιουργούνται αρνήσεις προτάσεων. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, μερικά απλά πράγματα που πρέπει να θυμόμαστε είναι:

1. Η άρνηση της πρότασης P^c είναι η αρχική P.
2. Η άρνηση της πρότασης $x \geq y$ είναι η $x < y$ και όχι η $x \leq y$.
3. Η άρνηση της πρότασης $x > y$ είναι η $x \leq y$ και όχι η $x < y$.
4. Η άρνηση της πρότασης «Η πρόταση P ισχύει για κάθε x» είναι ότι «Υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P δεν ισχύει».
5. Η άρνηση της πρότασης «Υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P ισχύει» είναι ότι «Δεν υπάρχει x για το οποίο η πρόταση P να ισχύει» ή, ισοδύναμα, «Για κάθε x ισχύει η P^c».
6. Η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ψευδής μόνο αν η P είναι αληθής και η Q ψευδής.

Το παρακάτω παράδειγμα θα σας βοηθήσει να εξασκηθείτε στις αρνήσεις:

Παράδειγμα 1.5. (Τηλεπαράθυρα) Παρακάτω ακολουθούν μερικές πραγματικές στιχομυθίες μεταξύ της Τηλεπερσόνας 1 (ΤΠ1) και της Τηλεπερσόνας 2 (ΤΠ2) που διημείφθησαν σε πρόσφατα δελτία των 8. Για κάθε στιχομυθία, ακολουθεί μια πρόταση και μετά μια άρνηση

1. (α΄) ΤΠ1: «Δεν υπάρχει υπουργός της κυβέρνησης με λιγότερο από 400 συμβούλους» .

(β΄) ΤΠ2: «Υπάρχει τουλάχιστον ένας υπουργός της κυβέρνησης που έχει λιγότερους από 400 συμβούλους».

2. (α΄) ΤΠ1: «Σε όλες τις προηγούμενες κυβερνήσεις πάνω από τους μισούς υπουργούς είχαν αποτύχει».

   (β΄) ΤΠ2: «Υπάρχει τουλάχιστον μια κυβέρνηση από τις προηγούμενες της οποίας είχαν αποτύχει οι μισοί ή λιγότεροι υπουργοί».

3. Δίνονται σταθερά C, συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και σύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$.

   (α΄) ΤΠ1: «$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$». Με λόγια, για όλα τα ζεύγη αριθμών στο I, ικανοποιείται η $|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$.

   (β΄) ΤΠ2: «$\exists x, y \in I : |f(y) - f(x)| > C|y - x|$». Με λόγια, υπάρχει ζεύγος x, y για το οποίο $|f(y) - f(x)| > C|y - x|$.

4. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και έστω $x_0, L \in \mathbb{R}$.

   (α΄) ΤΠ1: «$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$». Με λόγια, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε ισχύει $|f(x) - L| < \epsilon$.

   (β΄) ΤΠ2: «$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0,\ \exists x : 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - L| \geq \epsilon$». Με λόγια, υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε όσο μικρό δ και να πάρουμε, θα βρούμε ένα x για το οποίο ναι μεν $0 < |x - x_0| < \delta$, αλλά η $|f(x) - L| < \epsilon$ δεν θα ισχύει, δηλαδή $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

Ασκήσεις

1.18. (Μοναδικότητα μέγιστου και ελάχιστου στοιχείου) Να δείξετε ότι ένα σύνολο S δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα μέγιστα στοιχεία. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* μέγιστο στοιχείο. Αντιστοίχως, να δείξετε ότι ένα σύνολο S δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερα ελάχιστα στοιχεία. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για *το* ελάχιστο στοιχείο.

1.19. ($0.9999\dots$) Να δείξετε ότι ο αριθμός $0.99999\dots$ είναι ο 1, δείχνοντας καταρχάς πως ικανοποιεί την εξίσωση $10x = 9 + x$.

1.20. (Ιδιότητα infimum) Να αποδείξετε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.7.

1.21. (Infimum υποσυνόλου) Να αποδείξετε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.8.

1.22. [Σ/Λ, Π] (Supremum υποσυνόλου) Αν για δύο *σύνολα* έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

1.23. [Σ/Λ, Π] (Supremum υποσυνόλου) Αν για δύο *διαστήματα* έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

1.24. (Φραγμένα σύνολα) Ορίσαμε ότι ένα σύνολο S είναι φραγμένο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u τέτοιο ώστε $u \geq x$ για κάθε $x \in S$, και κάποιο κάτω φράγμα l τέτοιο ώστε $l \leq x$ για κάθε $x \in S$. Να αποδείξετε τις ακόλουθες προτάσεις, που μπορούν να χρησιμεύσουν σαν εναλλακτικοί ορισμοί του φραγμένου συνόλου:

1. Ένα σύνολο S είναι φραγμένο ανν υπάρχει κάποιο B τέτοιο ώστε $|x| \leq B$ για κάθε $x \in S$.

2. Ένα σύνολο S είναι φραγμένο ανν υπάρχει κάποιο B τέτοιο ώστε $|x| < B$ για κάθε $x \in S$.

1.25. (Εύρεση supremum και infimum) Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A=\{x:(x-\sqrt{2})(x-3)\leq 0\}, \quad A\cap\mathbb{Q}.$$

1.26. (Αυθαίρετα κοντινά σύνολα) Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \leq y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

1.27. [$\star$] (Είδη διαστημάτων) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τις έννοιες των supremum και infimum, ότι τα *μόνα* διαστήματα που υπάρχουν είναι αυτά των μορφών του Σκέλους 2 του Ορισμού 1.5.

1.7 Αξίωμα της Πληρότητας

Είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το Αξίωμα της Πληρότητας. Το αξίωμα αυτό είναι το μόνο που δεν μας είναι γνωστό από το Λύκειο, αν και στο Λύκειο χρησιμοποιούσαμε πολλές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών που προκύπτουν από αυτό.

Αξίωμα Πληρότητας: *Κάθε μη κενό, φραγμένο άνω σύνολο S έχει supremum.*

Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τα Αξιώματα Πεδίου και Διάταξης, το Αξίωμα της Πληρότητας δεν ισχύει για τους ρητούς αριθμούς. Πράγματι, ας φανταστούμε ότι βρισκόμαστε στον κόσμο των ρητών αριθμών, και ας εξετάσουμε το σύνολο των ρητών $\{x : \; x > 0, \; x^2 < 2\}$. Παρατηρήστε ότι δεν γράψαμε το σύνολο ως $\{x : \; x > 0, \; x < \sqrt{2}\}$ – είπαμε ότι είμαστε στον κόσμο των ρητών, στον οποίο δεν υπάρχει το $\sqrt{2}$. Παρατηρήστε επίσης ότι αυτό το σύνολο είναι άνω φραγμένο, και μάλιστα έχει πολλά άνω φράγματα, όμως δεν έχει κάποιο *ελάχιστο* άνω φράγμα. Ουσιαστικά, αυτό είναι το $\sqrt{2}$, που όμως, ως άρρητο, δεν υπάρχει για να το επικαλεστούμε.

Μπορεί να δειχθεί, αλλά η αυστηρή διατύπωση και η απόδειξη είναι αρκετά προχωρημένες για να τις παρουσιάσουμε εδώ, ότι ουσιαστικά η μόνη διαφορά μεταξύ ρητών και άρρητων είναι ότι μόνο στους δεύτερους ισχύει το Αξίωμα της Πληρότητας. Μπορούμε, μάλιστα, να αποδείξουμε ότι το μόνο σύνολο που υπάρχει όπου ισχύουν και οι τρεις ομάδες αξιωμάτων (δηλαδή τα Αξιώματα Πεδίου, Διάταξης και Πληρότητας) είναι αναγκαστικά οι πραγματικοί αριθμοί. Η διασαφήνιση και η απόδειξη αυτής της ιδιότητας επίσης ξεφεύγει από τις ανάγκες του μαθήματος.

Όπως φαντάζεστε, και το infimum ικανοποιεί μια αντίστοιχη ιδιότητα, που όμως δεν πρέπει να την υιοθετήσουμε αξιωματικά, αφού προκύπτει από το Αξίωμα της Πληρότητας. Η ιδιότητα αυτή είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα 1.1. ***(Υπαρξη infimum)*** *Κάθε μη κενό, φραγμένο κάτω σύνολο S έχει infimum.*

Απόδειξη: Αφού το S είναι φραγμένο κάτω, υπάρχει B τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S$, $x \geq B$. Έστω το σύνολο

$$-S \triangleq \{y : -y \in S\}.$$

Το σύνολο $-S$ είναι προφανώς μη κενό. Είναι επίσης και φραγμένο άνω από το $-B$. Πράγματι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $y \in -S$. Το $-y$ ανήκει στο S, άρα $-y \geq B \Rightarrow y \leq -B$ και επομένως πράγματι το $-B$ είναι άνω φράγμα του $-S$. Άρα, από το Αξίωμα της Πληρότητας, το $-S$ έχει supremum, που το συμβολίζουμε με $\sup(-S)$.

Θα δείξουμε ότι το S έχει για infimum το $-\sup(-S)$.

Καταρχάς, το $-\sup(-S)$ είναι κάτω φράγμα, δηλαδή $\forall x \in S$, $x \geq -\sup(-S)$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο x στο S με $x < -\sup(-S)$. Τότε $-x > \sup(-S)$ και έχουμε άτοπο, αφού $-x \in -S$.

Το $-\sup(-S)$ είναι όμως και το μέγιστο κάτω φράγμα. Έστω πως δεν είναι, και πως υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in S$, $x \geq -\sup(-S) + \epsilon$. Όμως, υπάρχει $y \in (-S)$ τέτοιο ώστε $y > \sup(-S) - \epsilon$, αλλιώς το $\sup(-S)$ δεν θα ήταν supremum του $-S$, λόγω της Πρότασης 1.7. Άρα $-y < -\sup(-S) + \epsilon$. Επειδή το $-y$ ανήκει στο S, καταλήξαμε σε άτοπο. ■

Το Αξίωμα της Πληρότητας θα μας είναι απαραίτητο στη συνέχεια σε διάφορα κρίσιμα σημεία της ανάπτυξης της θεωρίας, για παράδειγμα

1. στην απόδειξη του Θεωρήματος του Bolzano (Θεώρημα 4.1),

2. στην απόδειξη του θεωρήματος ότι οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα λαμβάνουν εκεί μέγιστη και ελάχιστη τιμή (Θεώρημα 4.5),

3. στον ορισμό του ολοκληρώματος (Ορισμός 7.2).

Επιπλέον, πιο γενικά, πολλές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, που κατά τα άλλα φαίνονται προφανείς και τις χρησιμοποιούμε χωρίς δεύτερη σκέψη, είναι άμεση απόρροια του Αξιώματος της Πληρότητας. Μερικά παραδείγματα, που τα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, είναι τα ακόλουθα:

1. Οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι φραγμένοι άνω.

2. Η ύπαρξη (τετραγωνικών και άλλων) ριζών πραγματικών αριθμών. Δείτε το Θεώρημα 1.1, που δίνεται χωρίς απόδειξη.

3. Η πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς, δηλαδή το γεγονός ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διακριτών πραγματικών υπάρχει ένας ρητός.

4. Η πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς, δηλαδή το γεγονός ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διακριτών πραγματικών υπάρχει ένας άρρητος.

Θεώρημα 1.1. ***(Ορισμός ρίζας πραγματικού αριθμού)***

1. *Έστω $y \in \mathbb{R}$ και $n \in N^*$ περιττός. Υπάρχει μοναδικός στο $\mathbb{R}$ αριθμός x τέτοιος ώστε $x^n = y$. Ο x συμβολίζεται ως $x = y^{\frac{1}{n}}$ και καλείται n-**οστή ρίζα ρίζα** του y.*

2. *Έστω $y \in [0, \infty)$ και $n \in N^*$ άρτιος. Υπάρχει μοναδικός στο $[0, \infty)$ αριθμός x τέτοιος ώστε $x^n = y$. Ο x συμβολίζεται ως $x = y^{\frac{1}{n}}$ και καλείται n-**οστή ρίζα** του y. Αν $y > 0$, ισχύει επίσης ότι $(-y^{\frac{1}{n}})^n = y$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτενής και παραλείπεται.

Ορισμός 1.9. ***(Ορισμός ρητής δύναμης πραγματικού αριθμού)*** *Έστω $x > 0$ και ρητός $r \in \mathbb{Q}$ με $r = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Ορίζουμε*

$$x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$$

*Το x καλείται **βάση**, το r καλείται **εκθέτης**, και το x^r καλείται η r **δύναμη** του x.*

Περιορίσαμε τον ορισμό του x^r στην περίπτωση που $x > 0$. Αν $x < 0$, πρέπει να είμαστε κάπως πιο προσεκτικοί. Δείτε για παράδειγμα την Άσκηση 1.29. Επίσης, παρατηρήστε ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γραφτεί ένας ρητός. Για παράδειγμα, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, $\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$. Αν και δεν το αποδεικνύουμε εδώ, αναφέρουμε ότι μπορούμε να αποδείξουμε ότι το x^r λαμβάνει πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από τη μορφή που χρησιμοποιούμε για το r.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης ζητείται στην Άσκηση 1.30.

Πρόταση 1.9. ***(Ιδιότητες ρητών δυνάμεων)*** *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ και για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$x^r x^s = x^{r+s}, \qquad x^r y^r = (xy)^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}.$$

Ασκήσεις

1.28. (Εναλλακτικός ορισμός ρητής δύναμης) Έστω $x > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$, με $r = p/q$ όπου $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{Z}^*$. Να δείξετε ότι

$$x^r = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

1.29. (Ρητή δύναμη αρνητικού αριθμού) Με τι ισούται το $(-32)^{3/5}$; Με τι ισούται το $\left((-32)^6\right)^{1/10}$; Με τι ισούται το $\left((-32)^{1/10}\right)^6$; Έχετε κάποιο πρόβλημα;

1.30. [$\star$] (Ιδιότητες ρητών δυνάμεων) Να αποδείξετε την Πρόταση 1.9.

1.8 Περαιτέρω Μελέτη

Ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων των αλγεβρικών δομών, δηλαδή συνόλων εφοδιασμένων με πράξεις που διαθέτουν συγκεκριμένες ιδιότητες, είναι η Άλγεβρα. Τα πεδία είναι μόνο μία από τις πολυάριθμες αλγεβρικές δομές που υπάρχουν. Πολύ καλές εισαγωγές στην Άλγεβρα υπάρχουν στα βιβλία του Fraleigh [FRAE], [FRAG] και των Dummit και Foote [DUFO].

Το βιβλίο του Spivak [SPIE], [SPIG] περιέχει μια πολύ αναλυτική παρουσίαση των Αξιωμάτων Πεδίου, Διάταξης και Πληρότητας και των διαφόρων ιδιοτήτων τους.

Προκειμένου να εισάγουμε τη διάταξη στο $\mathbb{R}$, αντί να ορίσουμε το $\mathbb{R}^*_+$ και να το εφοδιάσουμε αξιωματικά με κάποιες ιδιότητες, όπως κάναμε στην Παράγραφο 1.4, θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να είχαμε εισαγάγει απευθείας τη σχέση $<$ και να την εφοδιάζαμε αξιωματικά με μια σειρά από ιδιότητες. Δείτε το βιβλίο του Stroyan [STRO] γι' αυτή την προσέγγιση. Η προσέγγιση που ακολουθήσαμε εμφανίζεται, εκτός των άλλων, στα βιβλία των Apostol [APE1], [APG1], Spivak [SPIE], [SPIG], Royden [ROYD] και Sagan [SAGA].

Επίσης, περισσότερες απόρροιες του Αξιώματος της Πληρότητας υπάρχουν στα βιβλία των Apostol [APE1], [APG1], Spivak [SPIE], [SPIG], και Sagan [SAGA].

Αναφέρουμε, τέλος, ότι εναλλακτικά θα μπορούσαμε να μην είχαμε εισαγάγει αξιωματικά την έννοια των πραγματικών αριθμών, αλλά να ξεκινούσαμε με μια πιο θεμελιώδη έννοια, για παράδειγμα με τους φυσικούς ή τους ρητούς, να ορίζαμε με κάποιον τρόπο τους πραγματικούς, και να *αποδεικνύαμε* κατόπιν τα δοσμένα αξιώματα. Μια τέτοια προσέγγιση είναι κοπιώδης και δεν έχει θέση σε μαθήματα αυτού του επιπέδου. Μπορείτε να βρείτε πάντως, κατασκευές των πραγματικών στα βιβλία των Rudin [RUDI] και Spivak [SPIE], [SPIG].