4. Ειδικές Διακριτές, Συνεχείς Κατανομές

4.1. Η ομοιόμορφη διακριτή κατανομή.

• Εμφανίζεται στις περιπτώσεις όπου η υπό εξέταση τ.μ. X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών (π.χ. $X \in \{1,2,...,n\}$) και όλες οι πιθανότητες $P(X = i)$ είναι ισοπίθανες.

Η κατανομή με σ.π.

$$f(a_i) = \frac{1}{n},\ i = 1,2,...,n$$

καλείται διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$.

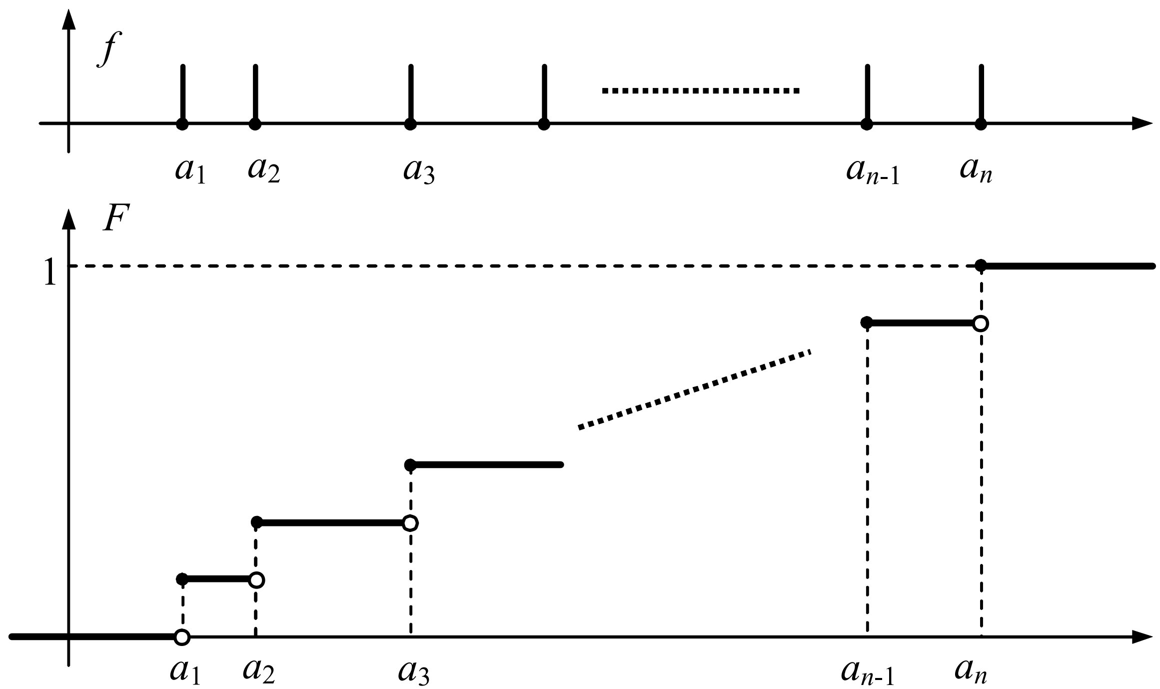
Π.χ. Αν X εκφράζει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού, τότε προφανώς

$$P(X = i) = \frac{1}{6},\ i = 1,2,...,6$$

και η X ακολουθεί την ομοιόμορφη στο $\{1,2,...,6\}$ κατανομή.

• Η συνάρτηση κατανομής της διακριτής ομοιόμορφης θα είναι

$$F(a_k) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n},\ k = 1,2,\ldots,n\ .$$



• Αν η τ.μ. X ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1,2,...,n\}$, η συνάρτηση κατανομής της θα είναι

$$F(k)=\sum_{i=1}^{k} f(i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}=\frac{k}{n},\ \ k=1,2,...,n\ .$$

ενώ για τη μέση τιμή και τη διασπορά τώρα θα ισχύει

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} iP(X=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2},$$

και

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} i^2P(X=i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

από όπου προκύπτει

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}=\frac{n^2-1}{12}$$

4.2. Η Διωνυμική κατανομή.

• Έστω ότι εκτελούμε *n* όμοια και ανεξάρτητα μεταξύ τους πειράματα (π.χ. *n* ρίψεις ενός νομίσματος). Το αποτέλεσμα κάθε ενός από αυτά τα πειράματα μπορεί να είναι είτε **1:** ***επιτυχία*** είτε **0:** ***αποτυχία*** με πιθανότητες p και $q = 1 - p$ αντίστοιχα.

• Μία πραγματοποίηση αυτού του πειράματος μπορεί να είναι η ακόλουθη:

$$11101100111010110110 \qquad (n = 20)$$

• Αν X η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών σε αυτά τα *n* πειράματα, τότε αυτή θα ακολουθεί την *Διωνυμική κατανομή* με παραμέτρους n, p.

Ορισμός. *Η κατανομή με σ.π.*

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0,1,\ldots,n$$

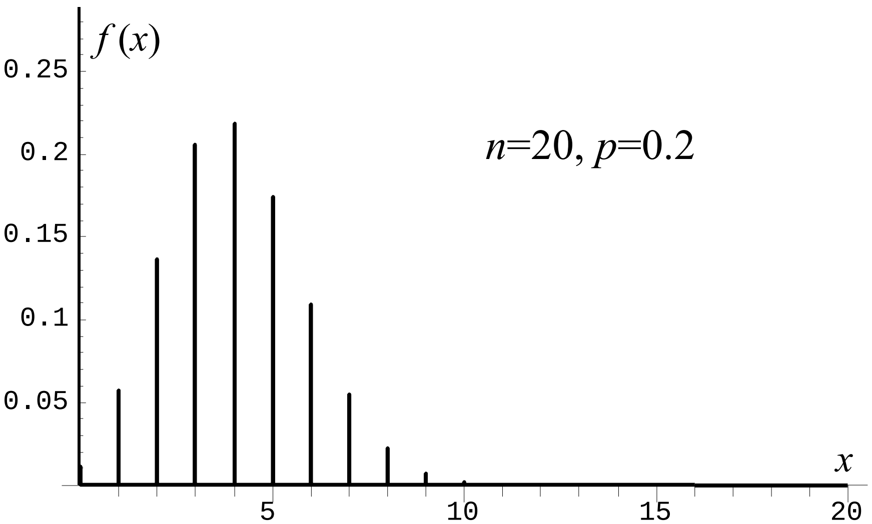
καλείται διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n > 0$, $p \in (0,1)$ (*συμβ. και με* $B(n,p)$).

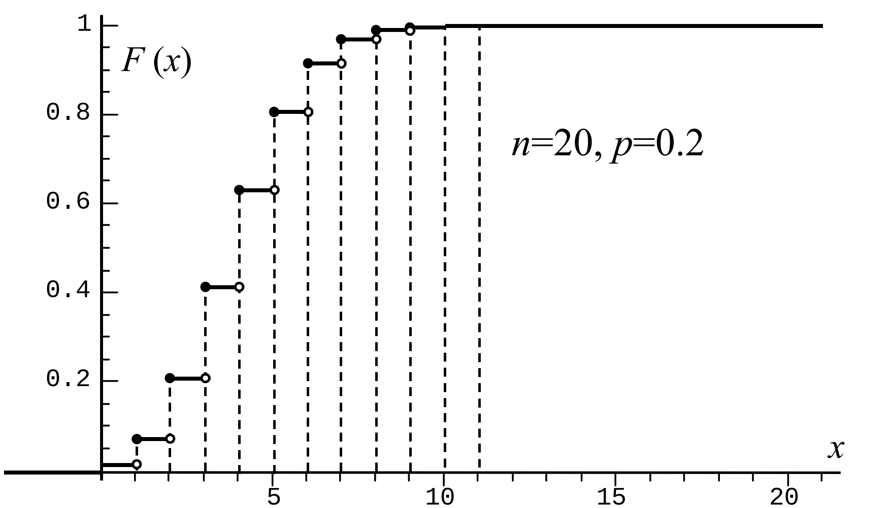
• Η διωνυμική κατανομή είναι πράγματι κατανομή ($f \geq 0$, $\Sigma f(x) = 1$) διότι (τύπος διωνύμου του Νεύτωνα)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \ \alpha,\ b \in \mathrm{R}$$

• Η σ.κ. της διωνυμικής κατανομής θα είναι

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=0}^{x} f(i) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \ \ x = 0,1,\ldots,n\,.$$





• Έστω τώρα μία τ.μ. $X \sim$ Β(n,p). Η μέση τιμή της θα είναι

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f_X(x) = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \ldots = np\ .$$

και

$$V(X) = np\bigl(1-p\bigr).$$

• Για n=1 η κατανομή $B(1,p)$ είναι γνωστή και ως κατανομή Bernoulli. Αν $X \sim B(1,p)$ τότε $X \in \{0,1\}$ και

$$P(X=0) = \binom{1}{0} p^0 (1-p) = 1-p \quad \text{και} \quad P(X=1) = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1} = p$$

ενώ $E(X) = 1 \cdot p = p$, $V(X) = 1 \cdot p(1-p) = p(1-p)$.

Άσκηση Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 10 άτομα με την ίδια ηλικία και κατάσταση υγείας. Αν κάθε άτομο αυτής της κατηγορίας έχει πιθανότητα 60% να ζει μετά από 30 χρόνια τότε να υπολογιστεί η πιθανότητα να ζουν μετά από 30 χρόνια (α) κανένας, (β) το πολύ 3 άτομα. Ποίος είναι ο μέσος αριθμός ατόμων που θα ζουν μετά από 30 χρόνια;

Λύση. Έστω X ο αριθμός των ατόμων από τα 10 που ζουν μετά από 30 χρόνια. Θα ισχύει ότι $X \sim B(10, 0.6)$ και επομένως

$$P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^{10} = 0.4^{10} \approx 0.000104$$

$$P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{3} P(X=x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 0.0546.$$

$$E(X) = np = 10 \cdot 0.6 = 6$$

Η γεωμετρική κατανομή

• Αν X η τ.μ. που εκφράζει *το πλήθος των δοκιμών μέχρι και την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας*, τότε η Χ ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p.

Ορισμός *Η κατανομή με σ.π.*

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1,2,\ldots$$

καλείται γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p (*συμβολίζεται και με Ge*(p)).

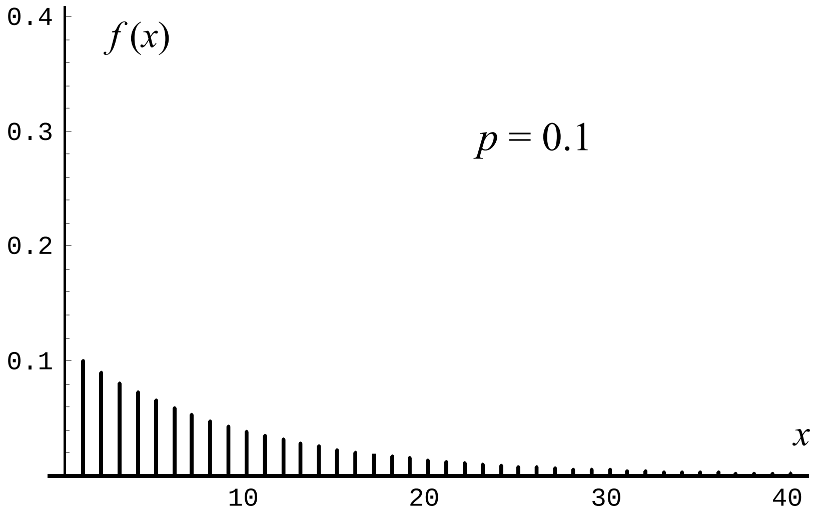
• Η σ.κ. της γεωμετρικής κατανομής θα είναι

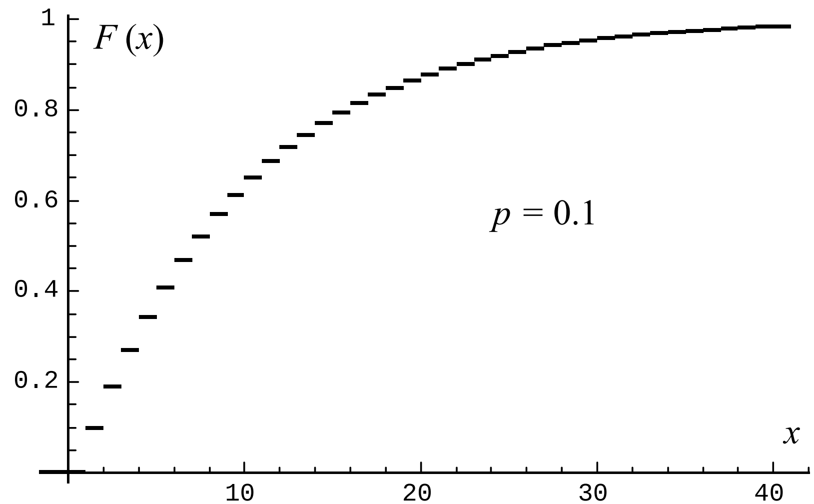
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{x} f(i) = 1-(1-p)^{x}, \quad x = 1,2,\ldots$$

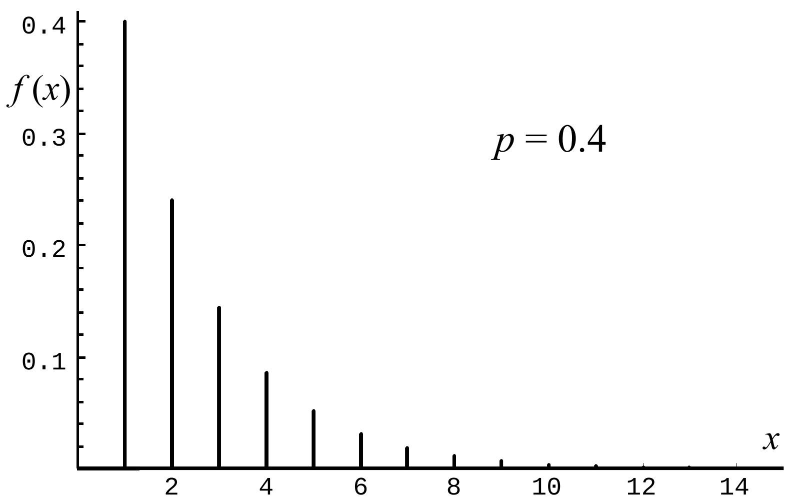
• Επίσης αν $X \sim \mathrm{Ge}(p)$ θα είναι

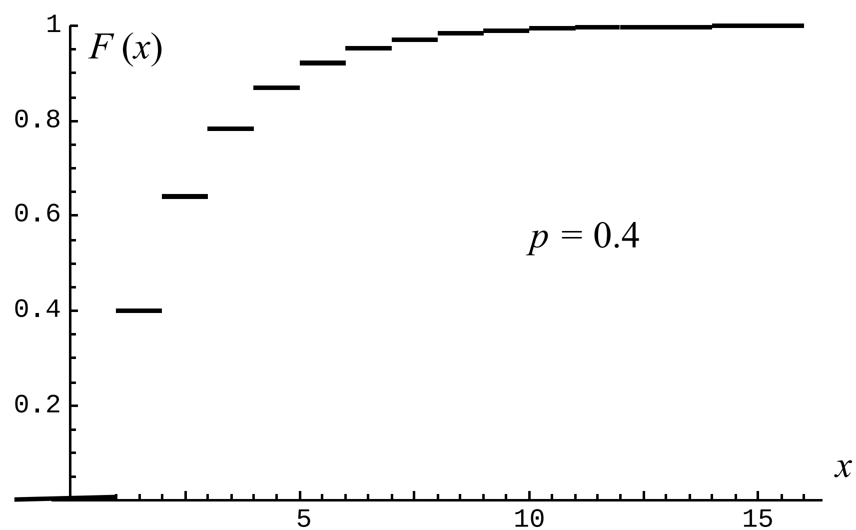
$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Η σ.π. και η σ.κ. της γεωμετρικής κατανομής δίνεται στα επόμενα σχήματα για









Η κατανομή Poisson.

• Συμβολίζουμε με X την τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των επιτυχιών σε n αν.ισον. πειράματα. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τ.μ. $X \sim B(n,p)$.

• Αν θεωρήσουμε όμως ότι $n \to \infty$, $p \to 0$, ώστε $np \to \lambda$ τότε η τ.μ. X εκφράζει το πλήθος των πραγματοποιήσεων από ένα μεγάλο αριθμό «σπάνιων» ενδεχομένων. Αποδ. ότι, σε αυτή την περίπτωση, η X θα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

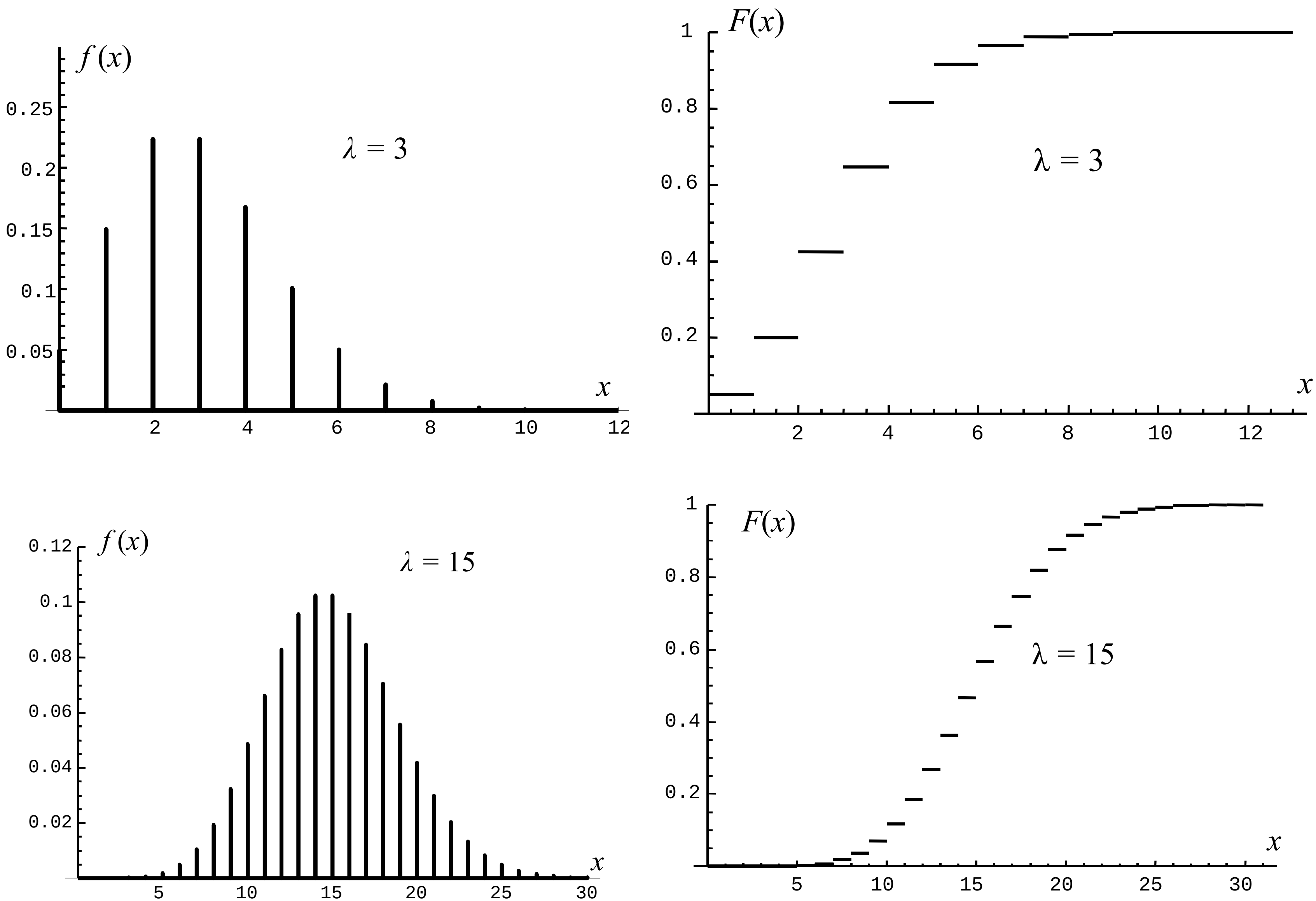
Ορισμός *Η κατανομή με σ.π.*

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

καλείται κατανομή Poisson με παράμετρο λ (*συμβολίζεται και με* $Po(\lambda)$).

• Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής Poisson θα είναι

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} f(i) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}, \; x = 0,1,2,...$$



f(x)
λ = 3
x
F(x)
λ = 3
x
f(x)
λ = 15
x
F(x)
λ = 15
x

• Έστω τώρα μία τ.μ. $X \sim$ Po(p). Η μέση τιμή της θα είναι

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \, .$$

Επίσης

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \, .$$

Άσκηση 4.6. Ο αριθμός X των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός βιβλίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 5$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα μια σελίδα να περιέχει 2 ακριβώς λάθη

Λύση. Αν X το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός βιβλίου, τότε $X \sim$ Po(λ). Θα ισχύει ότι

$$P(X = 2) = e^{-5} \frac{5^2}{2!} \approx 0.0842$$

Η Υπεργεωμετρική κατανομή.

• Έστω μία κάλπη η οποία περιέχει $\varLambda$ λευκές και $N-\varLambda$ μαύρες σφαίρες.

• Αν επιλέξουμε στην τύχη n σφαίρες (χωρίς επανάθεση) από την κάλπη αυτή και συμβολίσουμε με X των αριθμό των λευκών σφαιρών στο δείγμα των n σφαιρών, τότε η τ.μ. X θα ακολουθεί την *Υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους* $\varLambda$, N, n.

Ορισμός *Η κατανομή με σ.π.*

$$f(x) = \frac{\binom{\varLambda}{x}\binom{N-\varLambda}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = \max\{0, n+\varLambda-N\}, \dots, \min\{\varLambda, n\}$$

καλείται υπεργεωμετρική κατανομή με παραμ. $\varLambda$, N, n ($\varLambda, n < N$) (*συμβ.* $HG(\varLambda, N, n)$).

• Αν μία τ.μ. X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους $\varLambda$, N, n τότε αποδεικνύεται ότι

$$E(X) = n\frac{\varLambda}{N} \quad \text{και} \quad V(X) = n\frac{\varLambda}{N}\left(1-\frac{\varLambda}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Άσκηση Σε μία κλήρωση Lotto τοποθετούνται στην κληρωτίδα 49 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 49 και εκλέγονται στην τύχη 6 αριθμοί που κερδίζουν. Ποια είναι η πιθανότητα να περιέχονται 4 αριθμοί που κερδίζουν ανάμεσα σε 20 αριθμούς που έχουμε προσημειώσει;

Λύση. i) Η κληρωτίδα περιέχει 49 σφαίρες από τις οποίες έχουμε προσημειώσει τις 20. Ας θεωρήσουμε αυτές τις 20 σφαίρες ως λευκές. Δηλαδή $\Lambda = 20$ και $N = 49$.

Από την κάλπη τυχαία επιλέγουμε $n = 6$ σφαίρες. Αν X είναι το πλήθος των προσημειωμένων («λευκών») σφαιρών στο δείγμα μεγέθους 6 τότε ζητείται η πιθανότητα

$$P(X=4) = \frac{\binom{\Lambda}{x}\binom{N-\Lambda}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{20}{4}\binom{49-20}{6-4}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{20}{4}\binom{29}{2}}{\binom{49}{6}}.$$

Η ομοιόμορφη συνεχής κατανομή.

Ορισμός 4.6. *Η συνεχής κατανομή με σ.π.π.*

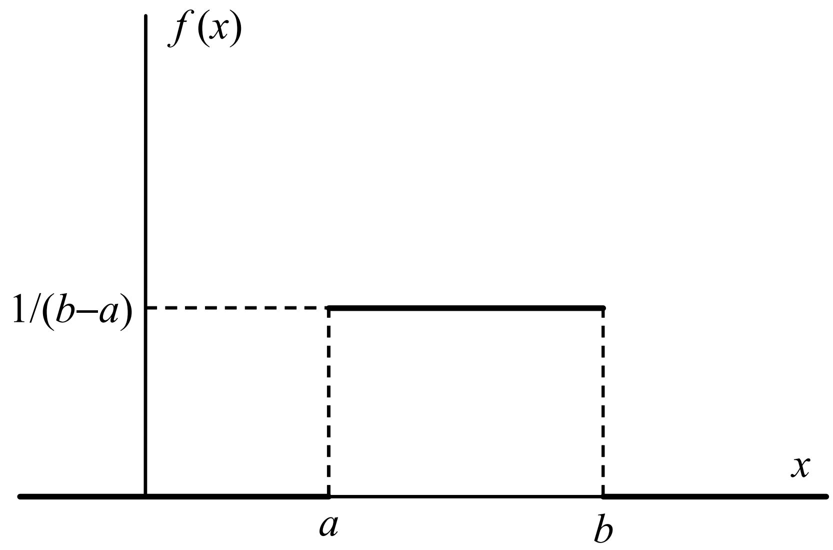
$$f(x)=\frac{1}{b-a},\quad x\in[a,b]$$

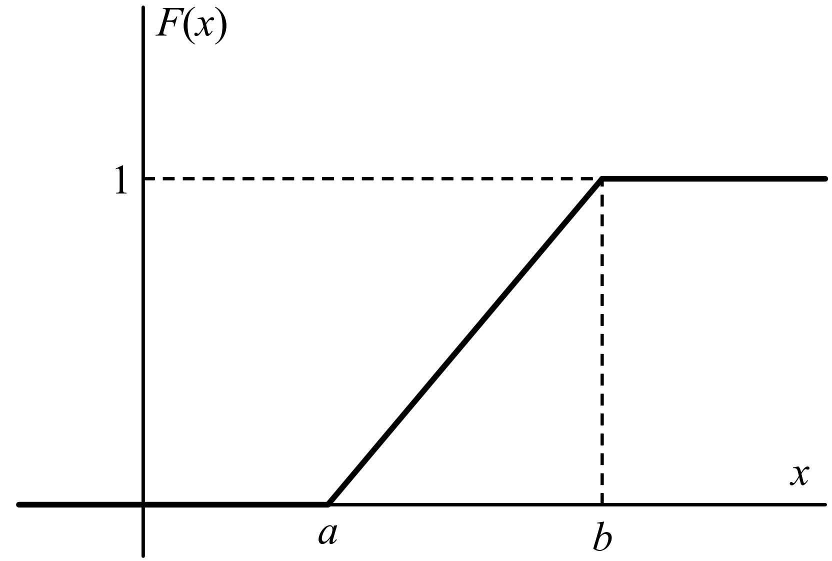
($f(x)=0,\ x\notin[a,b]$) *καλείται συνεχής ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα* $[a,b]$.

• Η σ.κ. της συνεχούς ομοιόμορφης κατανομής θα είναι

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a},\ x\in[a,b]$$

ενώ $F(x) = 0$ αν $x < a$, $F(x) = 1$ αν $x > b$.





• Η μέση τιμή και διασπορά της συνεχούς ομοιόμορφης κατανομής θα είναι

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}$$

και

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

Η εκθετική κατανομή.

• Η εκθετική κατανομή εμφανίζεται συνήθως σε περιπτώσεις όπου μελετάμε *το χρόνο αναμονής μέχρι την πραγματοποίηση ενός γεγονότος*.

Ορισμός *Η συνεχής κατανομή με σ.π.π.*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ \ x \ge 0 \quad (\lambda > 0)$$

($f(x) = 0,\ x < 0$) *καλείται εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.*

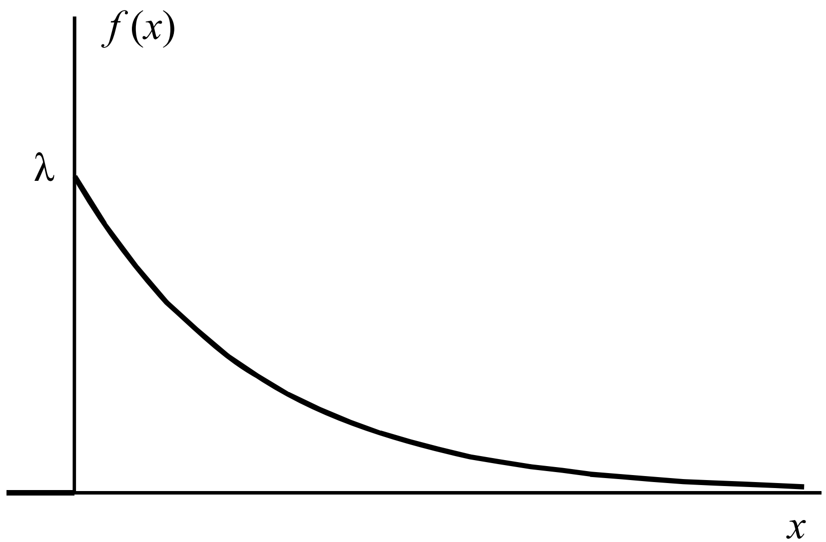
• Η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής θα είναι

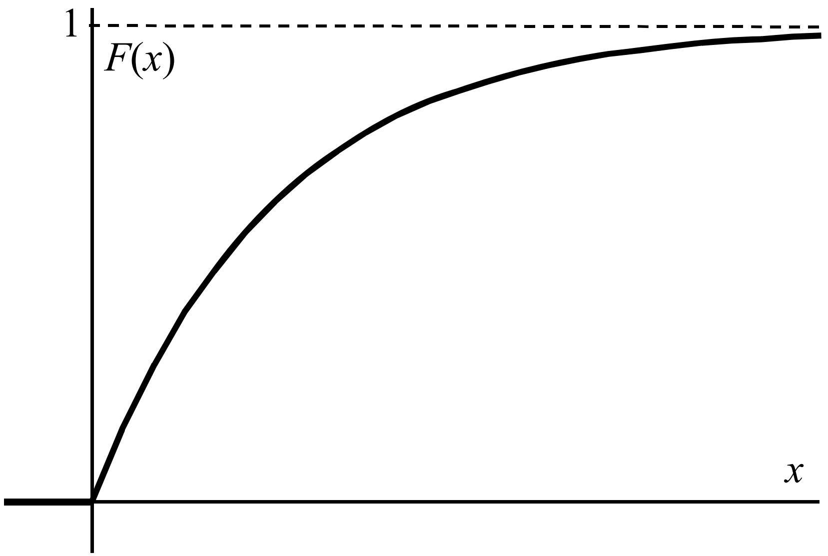
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \ \ x \ge 0$$

ενώ $F(x) = 0$ αν $x < 0$.

•Η μέση τιμή και διασπορά της εκθετικής κατανομής θα είναι

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{και} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$





Άσκηση. Η διάρκεια σε λεπτά των υπεραστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 λεπτά. Να βρεθούν οι πιθανότητες η διάρκεια μιας υπεραστικής συνδιάλεξης (α) να είναι μεταξύ 4 και 6 λεπτών (β) να είναι μικρότερη από 6 λεπτά δεδομένου ότι ήταν μεγαλύτερη από 4 λεπτά.

Λύση. Αν X είναι η διάρκεια σε λεπτά των υπεραστικών τηλεφωνικών συνδιαλέξεων τότε $E(X) = 1/\lambda = 2$ και άρα, $F_X(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-x/2}$, $x \ge 0$.

(α) $$P(4 < X < 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - e^{-6/2} - 1 + e^{-4/2} = e^{-4/2} - e^{-6/2} \approx 0.0855,$$

(β) $$P(X < 6 \mid X > 4) = \frac{P(4 < X < 6)}{P(X > 4)} = \frac{F_X(6) - F_X(4)}{1 - F_X(4)} = \frac{e^{-4/2} - e^{-6/2}}{e^{-4/2}} \approx 0.6321.$$

Η κανονική κατανομή

• Η κανονική κατανομή είναι η σημαντικότερη κατανομή με τις περισσότερες εφαρμογές. Σύμφωνα με το *κεντρικό οριακό θεώρημα* (θα διατυπωθεί σε επόμενη διάλεξη) κάθε φυσική ποσότητα της οποίας η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται από ένα μεγάλο αριθμό (ανεξάρτητων) παραγόντων ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή.

Ορισμός *Η συνεχής κατανομή με σ.π.π.*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R (\mu \in R, \sigma > 0)$$

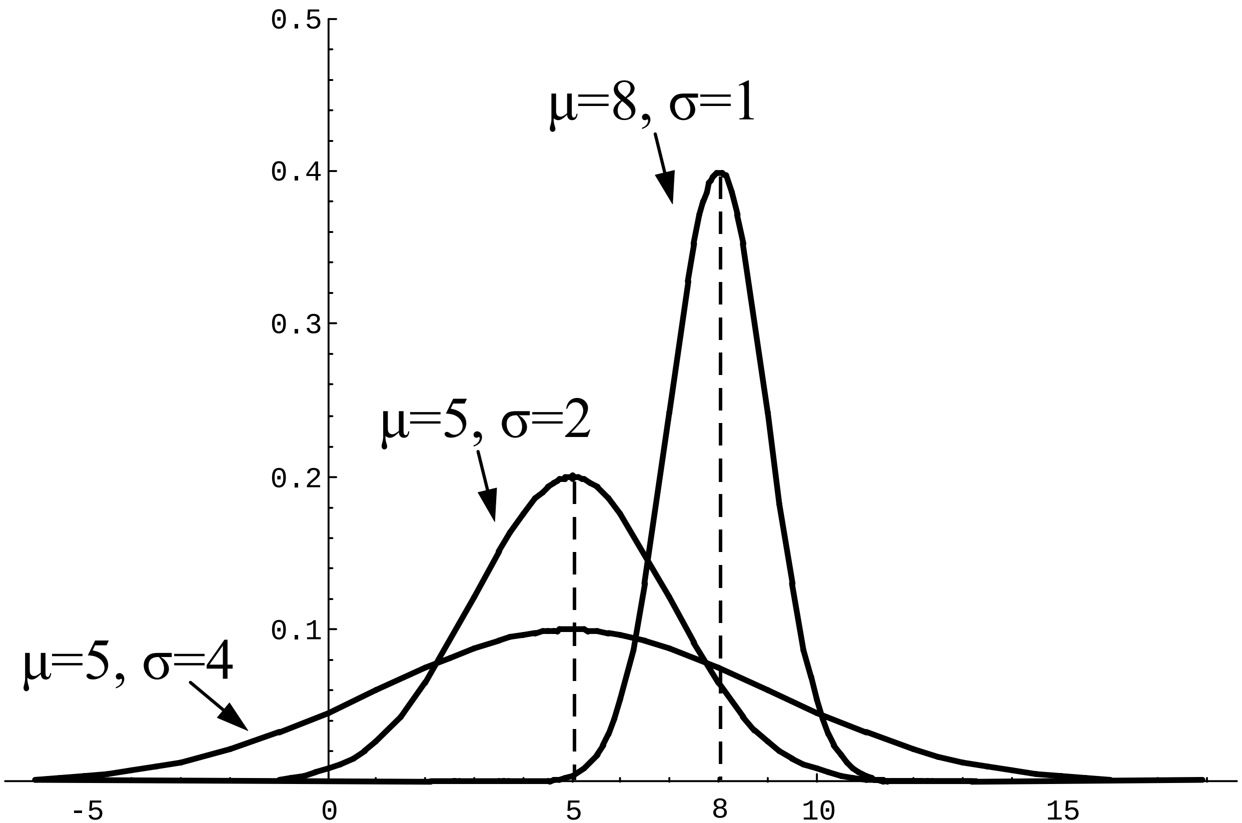
καλείται κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2. (*συμβ. με* $N(\mu,\sigma^2)$).

• Αποδεικνύεται ότι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu$$

και $V(X) = \sigma^2$.

Το γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $N(\mu,\sigma^2)$ δίνεται στο επόμενο σχήμα για α) $\mu = 8$, $\sigma = 1$, β) $\mu = 5$, $\sigma = 2$, γ) $\mu = 5$, $\sigma = 4$.



Πρόταση *Αν η τ.μ.* $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ *τότε και η τ.μ* (α, $b \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$)

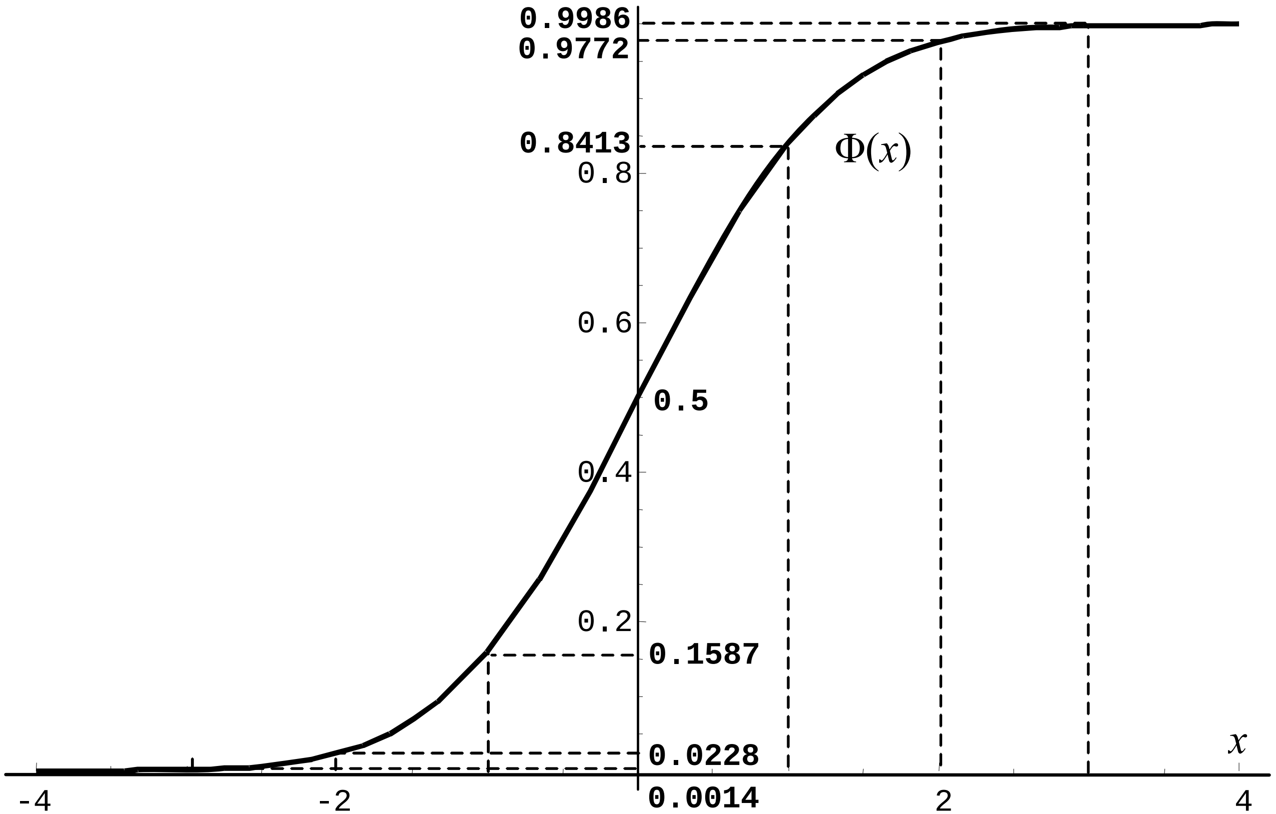
$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

• Η κανονική κατανομή N(0,1) (δηλ. μ=0, σ=1) θα καλείται ***τυπική κανονική κατανομή*** με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x \in \mathbf{R}\ .$$

• Η σ.π. και η σ.κ. της $N(0,1)$ συμβολίζονται συνήθως με $\varphi(x)$ και $\Phi(x)$ αντίστοιχα.

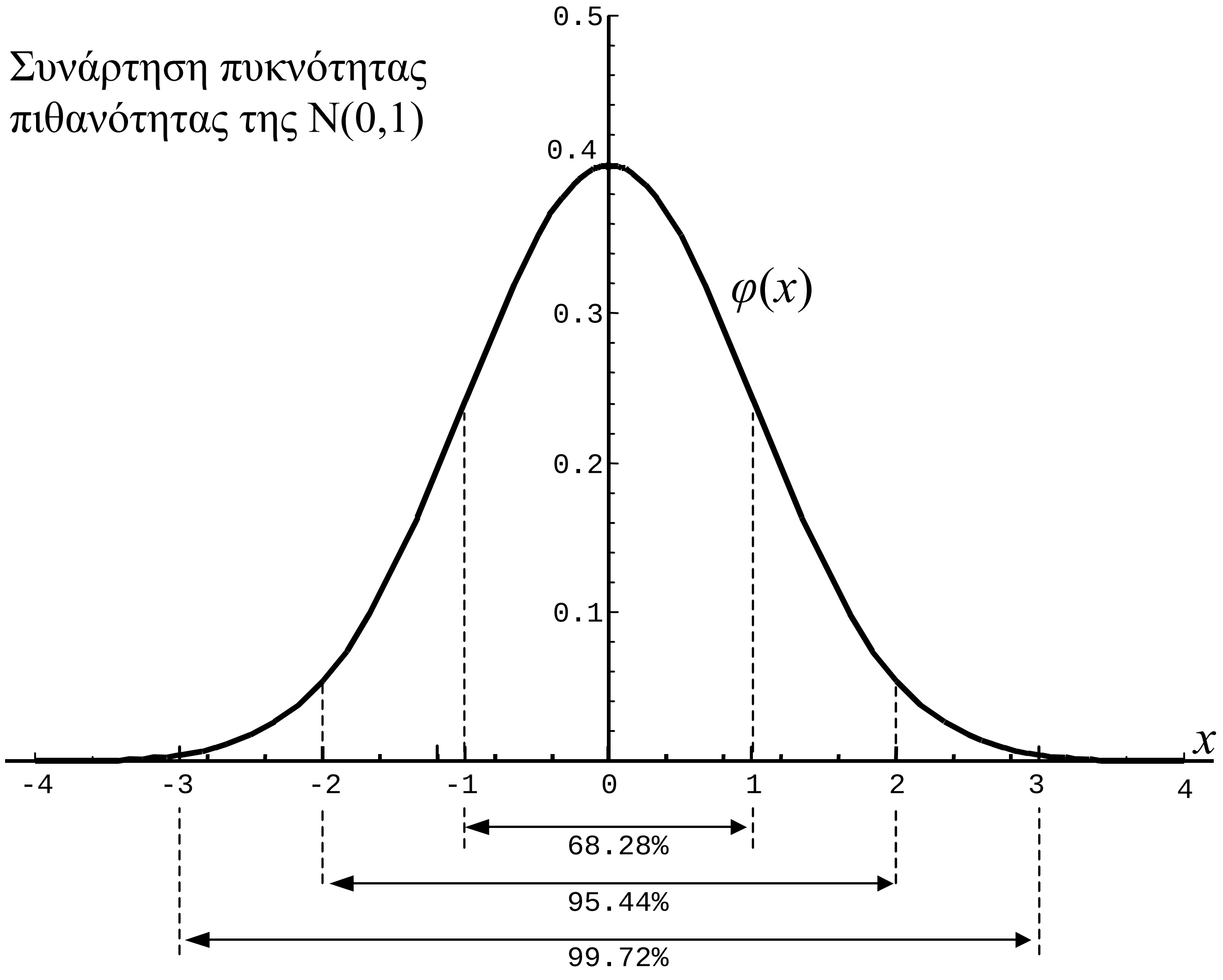
Η συνάρτηση κατανομής Φ της τυπικής κανονικής



Ενδεικτικά, $\Phi(-3) \approx 0.0014$, $\Phi(-2) \approx 0.0228$, $\Phi(-1) \approx 0.1587$,

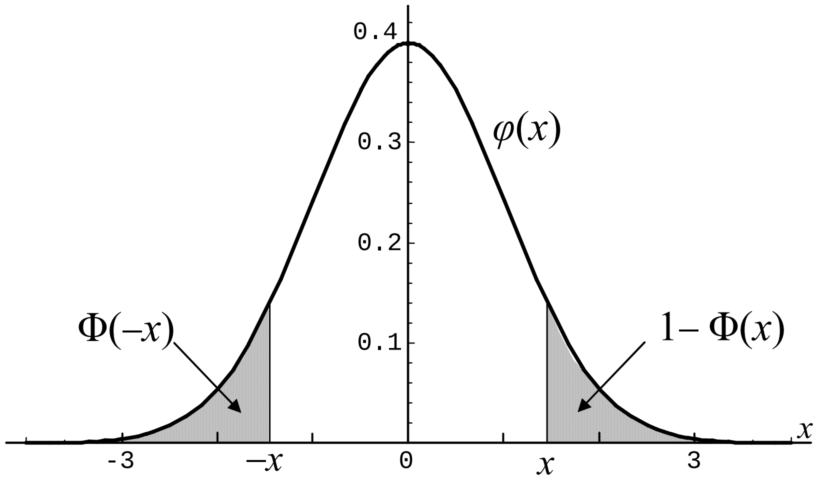
$\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) \approx 0.8423$, $\Phi(2) \approx 0.9772$, $\Phi(3) \approx 0.9986$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής θα έχει τη μορφή:



Επίσης, λόγω της συμμετρίας της φ θα είναι

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),\ \ x \in R\ .$$



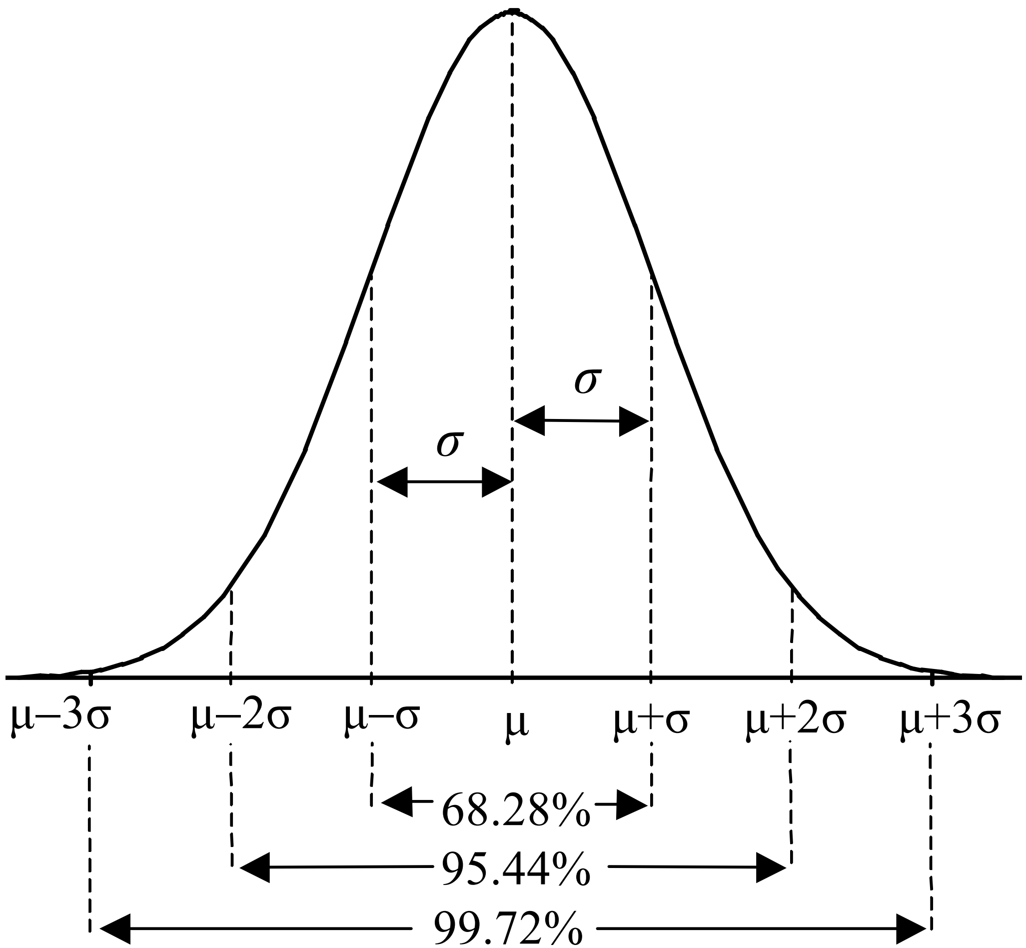
Αν η τ.μ. $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ τότε θα ισχύει ότι η τ.μ.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} \ \sim \ N\left(\frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2\right) = N(0,1)$$

και συνεπώς,

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

• Αν μία τ.μ. X ακολουθεί $N(\mu,\sigma^2)$ τότε παίρνει τιμές μεταξύ του $\mu-3\sigma$ και του $\mu+3\sigma$ με πιθανότητα σχεδόν 1, τιμές μεταξύ του $\mu-2\sigma$ και του $\mu+2\sigma$ με πιθανότητα περίπου 95% και τιμές μεταξύ του $\mu-\sigma$ και του $\mu+\sigma$ με πιθανότητα περίπου 68%.



Άσκηση. Αν η τ.μ. $X \sim$ N(6,4) να υπολογιστούν οι πιθανότητες

$$\alpha)\ P(X<6), \qquad \beta)\ P(X\geq 3), \qquad \gamma)\ P(2<X<8)$$

Λύση. Η τ.μ. $Z=\dfrac{X-6}{2}\sim N(0,1)$. Άρα,

$$(\alpha)\ \ P(X<6)=P(\frac{X-6}{2}<\frac{6-6}{2})=P(Z<0)=\Phi(0)=0.5$$

$$(\beta)\ \ P(X\geq 3)=P(\frac{X-6}{2}>\frac{3-6}{2})=1-P(Z\leq -1.5)=1-\Phi(-1.5)=\Phi(1.5)\approx 0.9332$$

$$(\gamma)\ \ P(2<X<8)=P(\frac{2-6}{2}<\frac{X-6}{2}<\frac{8-6}{2})=P(-2<Z<1)=\Phi(1)-\Phi(-2)$$
$$=\Phi(1)-1+\Phi(2)\approx 0.8413-1+0.9772=0.8185$$

Η κατανομή Γάμμα / Erlang.

• Μία άλλη σημαντική κατανομή είναι η *κατανομή Γάμμα* η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής.

Ορισμός *Η κατανομή με σ.π.π.*

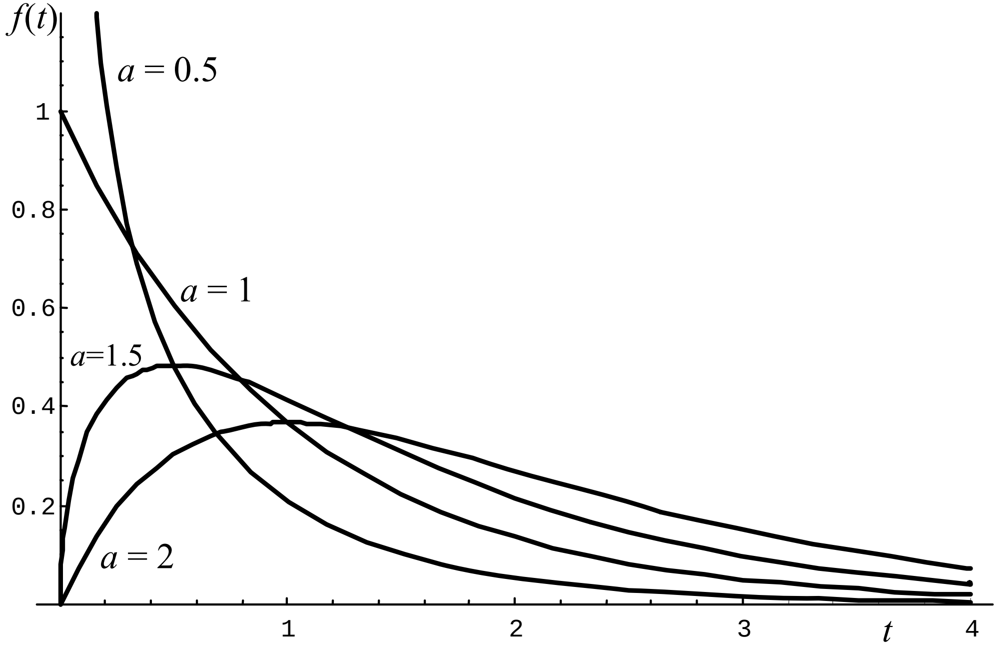
$$f(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \quad , \quad t \geq 0$$

όπου $\lambda > 0$, *και* $a \geq 0$ *καλείται κατανομή Γάμμα με παραμέτρους* (λ, a).

• Υπενθυμίζεται ότι η *συνάρτηση* γάμμα είναι η

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \,.$$

($\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in N$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$).



Αν $X \sim$ *Γάμμα*(a,λ) τότε

$$E(X^r) = \frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdots a}{\lambda^r}$$

και για $r = 1, 2$ προκύπτει ότι

$$E(X) = \frac{a}{\lambda}, \quad E(X^2) = \frac{(a+1)a}{\lambda^2}, \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(a+1)a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Η κατανομή Weibull

- Η κατ. Weibull μπορεί και αυτή να θεωρηθεί ως γενίκευση της εκθετικής κατανομής

Ορισμός *Η κατανομή με σ.π.π.*

$$f(t) = a\lambda^a t^{a-1} e^{-(\lambda t)^a},\ t \geq 0$$

όπου $\lambda > 0$, *και* $a \geq 0$ *καλείται κατανομή Weibull με παραμέτρους* (λ, a).

- Η σ.κ. της θα είναι

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^a}, \lambda > 0, a > 0,\ t > 0\ .$$

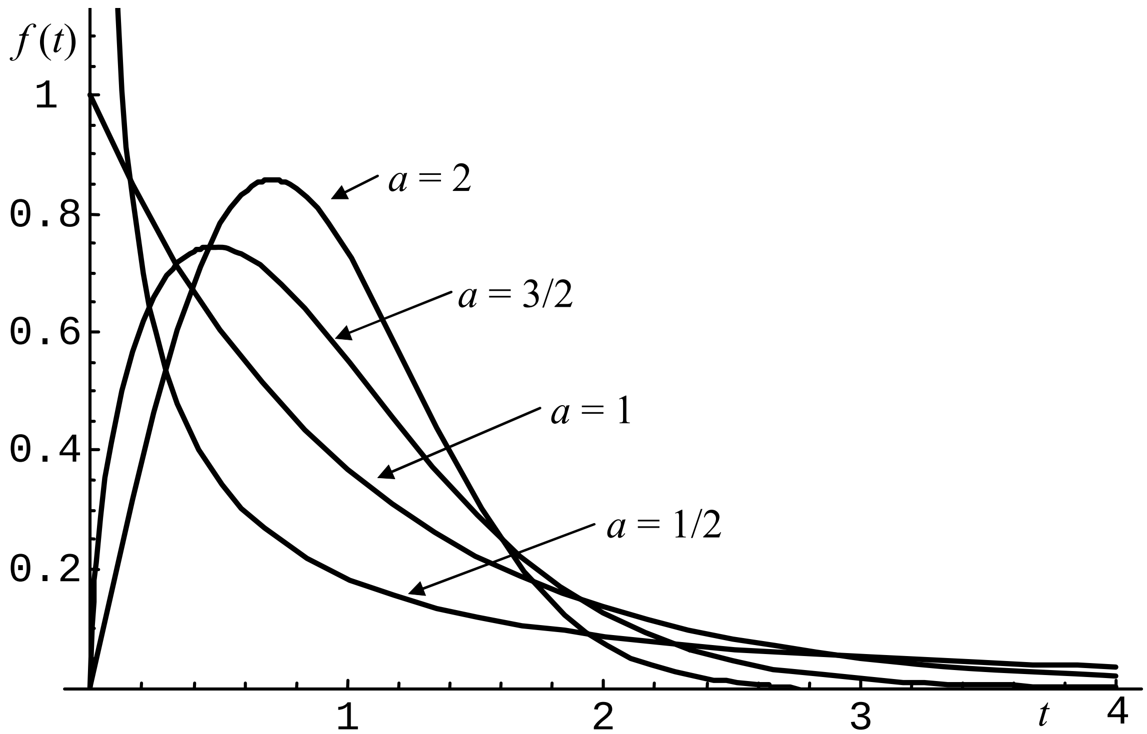
- Ισχύει ότι

$$E(T^n) = a\lambda^a \int_0^\infty \left(\frac{x^{1/a}}{\lambda}\right)^{n+a-1} e^{-x}\,\frac{x^{\frac{1}{a}-1}}{a\lambda}dx = \lambda^{-n}\int_0^\infty x^{\frac{n+a}{a}-1} e^{-x}dx = \lambda^{-n}\,\Gamma\left(\frac{n+a}{a}\right),$$

Συνεπώς,

$$E(T) = \lambda^{-1}\,\Gamma(1+a^{-1}) \quad \text{και} \quad E(T^2) = \lambda^{-2}\,\Gamma(1+2a^{-1}),$$

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \lambda^{-2}\left(\Gamma(1+2a^{-1}) - (\Gamma(1+a^{-1}))^2\right).$$



• Η παράμετρος a καλείται παράμετρος «μορφής» (*shape parameter*). Όταν το a αυξάνεται, η καμπύλη της σ.π.π. f γίνεται «στενότερη».

• Η παράμετρος λ καλείται παράμετρος κλίμακας (*scale parameter*) διότι η κατανομή της Weibull εξαρτάται από το λ και το t μόνο μέσα από το λt.

Η Λογαριθμοκανονική Κατανομή.

• Η κατανομή αυτή εμφανίζεται πολύ συχνά στην στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση.

Ορισμός *Έστω* $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. *Η κατανομή της τ.μ.*

$$Y = e^X$$

καλείται λογαριθμοκανονική (*lognormal*) *κατανομή με παραμέτρους* μ, σ^2 ($LN(\mu,\sigma^2)$).

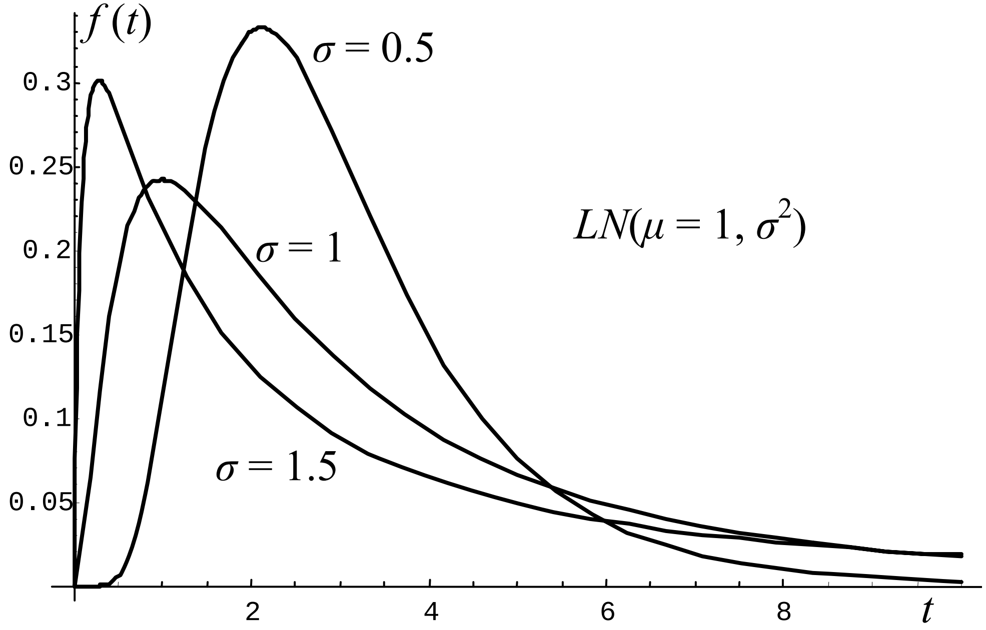
• Επομένως, αν $Y \sim LN(\mu,\sigma^2)$ τότε η τ.μ. $\ln Y \sim N(\mu,\sigma^2)$.

• Η τ.μ. Y θα έχει σ.κ.

$$F_{LN}(t) = P(Y \le t) = P(e^X \le t) = P(X \le \ln t) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right),\ t \ge 0$$

και σ.π.π.

$$f_{LN}(t) = \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi'\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}},\ t \ge 0$$



Αν $Y \sim LN(\mu,\sigma^2)$ τότε

$$E(Y^r) = E(e^{rX}) = E(e^{\sigma \cdot r \cdot (\frac{X-\mu}{\sigma}) + r\mu}) = e^{r\mu} E(e^{\sigma \cdot rZ}) = e^{r\mu} e^{(\sigma \cdot r)^2/2} = e^{r\mu + \frac{1}{2} r^2 \sigma^2}, \ r = 1,2,\ldots$$

από όπου άμεσα προκύπτει ότι

$$E(T) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$

$$E(T^2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}, \ \ V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - (e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2})^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$