

# Επιχειρησιακή Έρευνα Εισαγωγή στο Γραμμικό Προγραμματισμό

Χρήστος Γκόγκος

ΤΕΙ Ηπείρου

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

# Που στοχεύει ο Γραμμικός Προγραμματισμός;

## Το βασικό πρόβλημα

Αποδοτική διαχείριση πόρων έτσι ώστε να επιτευχθεί θετικό αποτέλεσμα για την επιχείρηση ή τον οργανισμό.

# Που στοχεύει ο Γραμμικός Προγραμματισμός;

## Το βασικό πρόβλημα

Αποδοτική διαχείριση πόρων έτσι ώστε να επιτευχθεί θετικό αποτέλεσμα για την επιχείρηση ή τον οργανισμό.

Αυτό μπορεί να σημαίνει αύξηση κέρδους, μείωση κόστους, βελτίωση ποιότητας προϊόντων και υπηρεσιών κλπ

# Παραδείγματα

- 1 Καθορισμός ποσοτήτων παραγωγής προϊόντων μιας βιομηχανίας. Επιζητείται το μέγιστο κέρδος.
- 2 Καθορισμός προγράμματος διανομής προϊόντων σε πελάτες με χρήση των μεταφορικών μέσων της επιχείρησης. Στόχος μπορεί να είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς.
- 3 Κατανομή διαφημιστικής δαπάνης σε διάφορα μέσα (τηλέοραση, ραδιόφωνο, περιοδικά, internet κ.α.). Επιζητείται η μέγιστη απόδοση της διαφήμισης.
- 4 κατανομή κεφαλαίου σε εναλλακτικές επενδύσεις. Στόχος μπορεί να είναι το μέγιστο κέρδος ή η ελαχιστοποίηση του επενδυτικού ρίσκου.

# Γραμμικός Προγραμματισμός

- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (Γ.Π.) είναι μια τεχνική που στοχεύει στην εύρεση της βέλτιστης λύσης για προβλήματα που αφορούν την ανάθεση περιορισμένων πόρων.
- Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του Γ.Π. είναι ότι μπορεί να υποστηρίξει τη διαδικασία λήψης αποφάσεων παρέχοντας επιπλέον πληροφορίες για την οικονομική ανάλυση του προβλήματος (ανάλυση ευαισθησίας).
- Μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε περιπτώσεις που οι σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι γραμμικές.

# Γραμμικές σχέσεις

- Μια σχέση ανάμεσα σε δύο μεγέθη είναι γραμμική όταν μια αλλαγή σε ένα μέγεθος προκαλεί ανάλογη αλλαγή στο άλλο μέγεθος.
- Για παράδειγμα η σχέση  $y = 3x + 2$  είναι γραμμική καθώς μια μοναδιαία αύξηση στο  $x$  προκαλεί πάντα αύξηση 3 μονάδων στο  $y$  άσχετα με την αρχική τιμή του  $x$ .
- Μια γραμμική σχέση όταν απεικονίζεται γραφικά είναι μια ευθεία γραμμή.
- Μια γραμμική σχέση αναπαρίσταται μαθηματικά ως  $y = mx + b$  όπου το  $m$  ονομάζεται κλίση (slope) και το  $b$  σημείο τομής (intercept).

# Χειρισμός περιπτώσεων που δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο Γ.Π.

Η εύρεση της βέλτιστης λύσης πολλές φορές είναι εξαιρετικά δύσκολη ή πρακτικά αδύνατη. Υπάρχουν πολλές άλλες μεθοδολογίες πέρα του Γ.Π. που μπορούν να εφαρμοστούν. Οι ευρετικοί αλγόριθμοι για παράδειγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό αρκετά καλών λύσεων.

# Παράδειγμα: Μεγιστοποίηση κέρδους

## Μίξη παραγωγής

Η βιοτεχνία ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ παράγει τραπέζια και καρέκλες. Τόσο τα τραπέζια όσο και οι καρέκλες απαιτούν εργασία στα τρία τμήματα της επιχείρησης: το ξυλουργείο, το βαφείο και το στιλβωτήριο. Ειδικότερα, η κατασκευή ενός τραπεζιού απαιτεί 8 ώρες στο ξυλουργείο, 4 ώρες στο βαφείο και 4 ώρες στο στιλβωτήριο. Αντίστοιχα η κατασκευή κάθε καρέκλας απαιτεί 8 στο ξυλουργείο, 2 στο βαφείο και 3 στο στιλβωτήριο. Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας για την επόμενη περίοδο παραγωγής είναι 960 στο ξυλουργείο, 400 στο βαφείο και 420 στο στιλβωτήριο. Το κέρδος της επιχείρησης από την πώληση κάθε τραπεζιού είναι 140 ευρώ ενώ για κάθε καρέκλα το κέρδος είναι 100 ευρώ. Ποια θα πρέπει να είναι η παραγωγή σε τραπέζια και καρέκλες για την επόμενη περίοδο;



# Μεταβλητές απόφασης

- Οι μεταβλητές απόφασης είναι μεγέθη που ο λήπτης αποφάσεων είναι σε θέση να προσδιορίσει.
- Πρακτικοί κανόνες για τον εντοπισμό των μεταβλητών απόφασης.
  - Το αποτέλεσμα μπορεί να υπολογιστεί γνωρίζοντας τις τιμές των μεταβλητών απόφασης.
  - Αντιπροσωπεύουν μεγέθη που οι τιμές τους μπορεί να καθορίζονται αποκλειστικά από το λήπτη αποφάσεων.
- για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι μεταβλητές απόφασης είναι

# Μεταβλητές απόφασης

- Οι μεταβλητές απόφασης είναι μεγέθη που ο λήπτης αποφάσεων είναι σε θέση να προσδιορίσει.
- Πρακτικοί κανόνες για τον εντοπισμό των μεταβλητών απόφασης.
  - Το αποτέλεσμα μπορεί να υπολογιστεί γνωρίζοντας τις τιμές των μεταβλητών απόφασης.
  - Αντιπροσωπεύουν μεγέθη που οι τιμές τους μπορεί να καθορίζονται αποκλειστικά από το λήπτη αποφάσεων.
- για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι μεταβλητές απόφασης είναι ο αριθμός από τα τραπέζια  $x_1$  και ο αριθμός από καρέκλες  $x_2$ .

# Η αντικειμενική συνάρτηση

- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές του προβλήματος με το αποτέλεσμα για το οποίο επιζητούμε τη βελτιστοποίηση.
- για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ η αντικειμενική συνάρτηση είναι

# Η αντικειμενική συνάρτηση

- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές του προβλήματος με το αποτέλεσμα για το οποίο επιζητούμε τη βελτιστοποίηση.
- για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ η αντικειμενική συνάρτηση είναι  $140x_1 + 100x_2$  .

# Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί αποτυπώνουν τους περιορισμούς πόρων που υπάρχουν στο πρόβλημα.
- Οι περιορισμοί καταγράφονται με την μορφή ανισοτήτων ή ισοτήτων.
- Για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι περιορισμοί είναι τρεις:
  - Περιορισμός Ξυλουργείου:

# Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί αποτυπώνουν τους περιορισμούς πόρων που υπάρχουν στο πρόβλημα.
- Οι περιορισμοί καταγράφονται με την μορφή ανισοτήτων ή ισοτήτων.
- Για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι περιορισμοί είναι τρεις:
  - Περιορισμός Ξυλουργείου:  $8x_1 + 8x_2 \leq 960$
  - Περιορισμός Βαφείου:

# Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί αποτυπώνουν τους περιορισμούς πόρων που υπάρχουν στο πρόβλημα.
- Οι περιορισμοί καταγράφονται με την μορφή ανισοτήτων ή ισοτήτων.
- Για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι περιορισμοί είναι τρεις:
  - Περιορισμός Ξυλουργείου:  $8x_1 + 8x_2 \leq 960$
  - Περιορισμός Βαφείου:  $4x_1 + 2x_2 \leq 400$
  - Περιορισμός Στιλβωτηρίου:

# Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί αποτυπώνουν τους περιορισμούς πόρων που υπάρχουν στο πρόβλημα.
- Οι περιορισμοί καταγράφονται με την μορφή ανισοτήτων ή ισοτήτων.
- Για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ οι περιορισμοί είναι τρεις:
  - Περιορισμός Ξυλουργείου:  $8x_1 + 8x_2 \leq 960$
  - Περιορισμός Βαφείου:  $4x_1 + 2x_2 \leq 400$
  - Περιορισμός Στιλβωτηρίου:  $4x_1 + 3x_2 \leq 420$



# Πρακτικός κανόνας για τον έλεγχο των περιορισμών

- Θα πρέπει να μπορούμε να περιγράψουμε λεκτικά τι αντιπροσωπεύει το αριστερό και τι το δεξί μέρος της κάθε ανισότητας (π.χ. Περιορισμός Βαφείου:  $4x_1 + 2x_2 \leq 400$ ).

# Μαθηματικό μοντέλο προβλήματος μίξης παραγωγής

## LP μοντελοποίηση

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 140x_1 + 100x_2 \\ \text{subject to} & 8x_1 + 8x_2 \leq 960 \quad \text{περιορισμός ξυλουργείου} \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \quad \text{περιορισμός βαφείου} \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 420 \quad \text{περιορισμός στιλβωτηρίου} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

# Παράδειγμα: Ελαχιστοποίηση κόστους

## Δίαιτα

Μια δίαιτα καθορίζει ότι θα πρέπει να παρέχονται ημερήσια τουλάχιστον 300 θερμίδες, 36 μονάδες βιταμίνης A και 90 μονάδες βιταμίνης C. Ένα ποτήρι του διαιτητικού ροφήματος X παρέχει 60 θερμίδες, 12 μονάδες βιταμίνης A και 10 μονάδες βιταμίνης C και έχει κόστος 0,12 ευρώ. Ένα ποτήρι του διαιτητικού ροφήματος Y παρέχει 60 θερμίδες, 6 μονάδες βιταμίνης A και 30 μονάδες βιταμίνης C και έχει κόστος 0,15 ευρώ. Πόσα ποτήρια από το κάθε ρόφημα θα πρέπει να καταναλωθούν έτσι ώστε με τον οικονομικότερο τρόπο να καλυφθούν οι ημερήσιες ανάγκες;

# Μαθηματικό μοντέλο προβλήματος διαίτας

## LP μοντελοποίηση

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 0.12x + 0.15y \\ \text{subject to} & 60x + 60y \geq 300 \\ & 12x + 6y \geq 36 \\ & 10x + 30y \geq 90 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$