Η μέθοδος Simplex

Χρήστος Γκόγκος

ΤΕΙ Ηπείρου

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Η μέθοδος Simplex

Simplex

Είναι μια καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων υπολογισμών μέσω των οποίων ξεκινώντας από ένα αρχικό σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων οδηγούμαστε σε κάθε επανάληψη από ένα ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων σε ένα άλλο, γειτονικό με το προηγούμενο, το οποίο αντιστοιχεί σε καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να εντοπισθεί η βέλτιστη λύση.

Πλεονεκτήματα της μεθόδου Simplex

- Εντοπισμός βέλτιστης λύσης
- Γρήγορος χρόνος εκτέλεσης
- Παροχή πληθώρας πληροφοριών ”οικονομικής φύσεως” σχετικά με την λύση

Μεταβλητές περιθωρίου (slack variables)

- Χρησιμοποιούνται προκειμένου να μετατρέψουν έναν περιορισμό του προβλήματος από ανισότητα σε ισότητα.
- Αντιπροσωπεύουν την ποσότητα ενός πόρου που δεν χρησιμοποιείται.
- Μπορούν να συμπεριληφθούν και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές

Βασικές και μη βασικές μεταβλητές

- Βασικές λέγονται οι μεταβλητές που έχουν **μη μηδενικές** τιμές.
- Μη βασικές λέγονται οι μεταβλητές που έχουν **μηδενικές** τιμές.
- Το σύνολο των βασικών μεταβλητών καλείται και βάση της λύσης που αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο πίνακα.
- Κάθε βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του προβλήματος.

Η επαναληπτική διαδικασία Simplex

1. Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης.
2. Επιλογή νέας βασικής μεταβλητής από τις μη βασικές μεταβλητές.
3. Επιλογή βασικής μεταβλητής που αντικαθίσταται.
4. Υπολογισμός νέων τιμών οδηγού σειράς.
5. Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα.
6. Υπολογισμός νέων τιμών για τις σειρές Z_j και $C_j - Z_j$.

Κατάστρωση αρχικού πίνακα Simplex

LP μοντελοποίηση

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 140x_1 + 100x_2 \\ \text{subject to} \quad & 8x_1 + 8x_2 \leq 960 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 420 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 140x_1 + 100x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ \text{subject to} \quad & 8x_1 + 8x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 960 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 400 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 420 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Το σύστημα εξισώσεων έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις άρα έχει άπειρες λύσεις

Θέτοντας $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ προκύπτουν ως λύσεις: $s_1 = 960, s_2 = 400$ και $s_3 = 420$ που θα αποτελέσουν και την αρχική λύση της Simplex

Κατάστρωση αρχικού πίνακα Simplex

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	8	8	1	0	0	960
0	s_2	4	2	0	1	0	400
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Η σειρά z_j αντιπροσωπεύει πόσο θα μειωθεί το κέρδος αν η τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά 1 μονάδα
Η σειρά $c_j - z_j$ αντιπροσωπεύει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος αν η αντίστοιχη μεταβλητή αυξηθεί κατά 1 μονάδα

Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης

Αν όλες οι τιμές της σειράς $c_j - z_j$ είναι αρνητικές ή μηδέν τότε η λύση είναι βέλτιστη.

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	8	8	1	0	0	960
0	s_2	4	2	0	1	0	400
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Επιλογή νέας μεταβλητής που θα γίνει βασική

Επιλέγουμε από τις μη βασικές μεταβλητές (στήλες) εκείνη με τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά $c_j - z_j$

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	8	8	1	0	0	960
0	s_2	4	2	0	1	0	400
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Επιλογή βασικής μεταβλητής που αντικαθίσταται

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης δηλαδή τις ποσότητες με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης

Το μικρότερο θετικό κλάσμα προσδιορίζει τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί

s_1: 960/8 =120

s_2: 400/4 =**100**

s_3: 420/4 =105

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	8	8	1	0	0	960
0	s_2	4	2	0	1	0	400
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Αντικατάσταση οδηγού σειράς

οδηγός στήλη x_1
οδηγός σειρά s_2
οδηγό στοιχείο 4
Διαίρεση της οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	x_1	8	8	1	0	0	960
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Υπολογισμός νέων τιμών για τις άλλες σειρές (πλην της οδηγού σειράς)

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	8	8	1	0	0	960
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

$s_1 \leftarrow s1 - 8$(νέα σειρά x1)
$s_3 \leftarrow s3 - 4$(νέα σειρά x1)

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	4	1	-2	0	160
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	0	1	0	-1	1	20
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	140	100	0	0	0	

Υπολογισμός σειρών z_j, $c_j - z_j$

Η τιμή σε κάθε στοιχείο της σειράς z_j προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το συντελεστή κέρδους (1η στήλη) με την τιμή που υπάρχει σε κάθε στήλη (π.χ. για την στήλη x_2 η τιμή 70 προκύπτει ως $0 * 4 + 140 * 1/2 + 0 * 1$)

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	4	1	-2	0	160
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	0	1	0	-1	1	20
	z_j	140	70	0	35	0	14000
	$c_j - z_j$	0	30	0	-35	0	

Ο 2ος πίνακας Simplex

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	4	1	-2	0	160
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	0	1	0	-1	1	20
	z_j	140	70	0	35	0	14000
	$c_j - z_j$	0	30	0	-35	0	

Η λύση που περιγράφει ο 2ος πίνακας είναι η
$x_1 = 100, x_2 = 0, s_1 = 160, s_2 = 0, s_3 = 20$

Ο 3ος πίνακας Simplex όπως προκύπτει από τον 2ο πίνακα Simplex

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	4	1	-2	0	160
140	x_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	s_3	0	1	0	-1	1	20
	z_j	140	70	0	35	0	14000
	$c_j - z_j$	0	30	0	-35	0	

Η μη βασική μεταβλητή που εισέρχεται ως βασική είναι η x_2 ενώ εξέρχεται η s_3

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	0	1	2	-4	80
140	x_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	x_2	0	1	0	-1	1	20
	z_j	140	100	0	5	30	14600
	$c_j - z_j$	0	0	0	-5	-30	

Ο τελικός πίνακας Simplex

Συντ.Κέρδ.c_j		140	100	0	0	0	
	Βασ.Μετ.	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	B_i
0	s_1	0	0	1	2	-4	80
140	x_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	x_2	0	1	0	-1	1	20
	z_j	140	100	0	5	30	14600
	$c_j - z_j$	0	0	0	-5	-30	

Η λύση που περιγράφει ο τελικός πίνακας είναι η $x_1 = 90, x_2 = 20, s_1 = 80, s_2 = 0, s_3 = 0$ με μέγιστο κέρδος $140x_1 + 100x_2 = 14600$