Λύσεις θεμάτων Επιχειρησιακής Έρευνας (17/09/2014)

Θέμα 1

Μια επιχείρηση χρησιμοποιεί 3 πρώτες ύλες Α, Β, Γ για να παράγει 2 προϊόντα Π1 και Π2. Για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Α απαιτούνται 1 μονάδα πρώτης ύλης Α, 1 μονάδα πρώτης ύλης Β και 2 μονάδες πρώτης ύλης Γ. Αντίστοιχα για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος Β απαιτούνται 2 μονάδες πρώτης ύλης Α, 1 μονάδα πρώτης ύλης Β και 1 μονάδα πρώτης ύλης Γ. Η επιχείρηση διαθέτει αποθέματα ύψους 30, 20 και 36 μονάδων από τις πρώτες ύλες Α, Β και Γ. Μια μονάδα του προϊόντος Π1 πωλείται στην αγορά προς 200 € και μια μονάδα του προϊόντος Π2 πωλείται προς 300 €. Διατυπώστε το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που προσδιορίζει το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής (συνδυασμός μονάδων από προϊόντα Π1 και Π2) ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό εισόδημα της επιχείρησης

Απάντηση:

	Π1	Π2	Αποθέματα
Πρώτη ύλη Α	1	2	30
Πρώτη ύλη Β	1	1	20
Πρώτη ύλη Γ	2	1	36
Τιμή πώλησης προϊόντος ανά μονάδα	200	300	

Το πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού που περιγράφει το πρόβλημα είναι:

Μεγιστοποίηση $z=200x1 + 300x2$

Περιορισμοί $x1 + 2x2 <= 30$

$x1 + x2 <=20$

$2x1 + x2 <= 36$

$x1, x2 >=0$

Θέμα 2

Μια επιχείρηση φασόν δερμάτινων ενδυμάτων παράγει 2 προϊόντα, Π1 και Π2. Για την παραγωγή τους χρησιμοποιούνται 2 πρώτες ύλες Α και Β. Για την εύρεση του βέλτιστου πλάνου παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη από την πώληση των 2 προϊόντων της χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Μεγιστοποίηση $z=0,5x1 + 0,6x2$

Περιορισμοί $2x1 + 2x2 <= 40$ (περιορισμός Α)

$2x1 + 4x2 <= 60$ (περιορισμός Β)

$x1, x2 >=0$

Ο τελικός πίνακας Simplex για το πρόβλημα αυτό είναι ο εξής:

Συντελεστής κέρδους	Cj	0,5	0,6	0	0	Ποσότητα
Cj	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bi

0,5	x1	1	0	-1	-0,5	10
0,6	x2	0	1	0,5	0,5	10
	Zj	0,5	0,6	0,2	0,05	11
	Cj – Zj	0	0	-0,2	-0,05	

α) Ποιοι είναι οι δεσμευτικοί περιορισμοί του προβλήματος;
β) Ποιες είναι οι σκιώδεις τιμές των περιορισμών και ποια η οικονομική τους ερμηνεία;
γ) Ποια είναι τα όρια τιμών καθενός από τους διαθέσιμους πόρους για τις οποίες ισχύουν οι σκιώδεις τιμές;
δ) Η επιχείρηση σκέφτεται να προσθέσει ένα νέο προϊόν. Η κατασκευή του προϊόντος Π3 απαιτεί 3 μονάδες πρώτης ύλης Α και 2 μονάδες πρώτης ύλης Β. Το κέρδος ανά μονάδα του νέου αυτού προϊόντος είναι 0,5 ευρώ. Συμφέρει την επιχείρηση να το παράγει;

Απάντηση:
α) Οι δεσμευτικοί περιορισμοί είναι εκείνοι που έχουν τις αντίστοιχες μεταβλητές περιθωρίου ίσες με το μηδέν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα και η μεταβλητή περιθωρίου s1 που αντιστοιχεί στο περιορισμό Α και η μεταβλητή περιθωρίου s2 που αντιστοιχεί στο περιορισμό Β έχουν τιμή μηδέν άρα και οι 2 περιορισμοί είναι δεσμευτικοί.
β) Η σκιώδης τιμή του περιορισμού Α είναι ίση με 0,2 και αυτό σημαίνει ότι η οριακή αξία μιας επιπλέον μονάδας της πρώτης ύλης Α είναι 0,2 (δηλαδή το κέρδος θα αυξηθεί κατά 0,2 για 1 επιπλέον μονάδα πρώτης ύλης Α)
Η σκιώδης τιμή του περιορισμού Β είναι ίση με 0,05 και αυτό σημαίνει ότι η οριακή αξία μιας επιπλέον μονάδας της πρώτης ύλης Β είναι 0,05 (δηλαδή το κέρδος θα αυξηθεί κατά 0,05 για 1 επιπλέον μονάδα πρώτης ύλης Β)
γ) Τα όρια για την πρώτη ύλη Α έτσι ώστε να ισχύουν οι σκιώδεις τιμές είναι από 30 μέχρι 60. Η τιμές αυτές προκύπτουν ως εξής: Αν μεταβάλλω τη διαθέσιμη ποσότητα υλικού Α από 40 σε 40+θ τότε η μεταβλητή x1 θα γίνει 10-θ ενώ η μεταβλητή x2 θα γίνει 10+0,5θ (βλ. συντελεστές μετατροπής στήλης s1). Όμως και οι δύο αυτές ποσότητες θα πρέπει να είναι θετικές
10-θ >=0 ➔ θ>=10
10+0,5θ>=0 ➔ θ<=20
Άρα προκύπτει ότι οι αποδεκτές τιμές στις οποίες μπορεί να διακυμανθεί η παράσταση 40+θ είναι από 30 μέχρι 60.

Τα όρια για την πρώτη ύλη Β έτσι ώστε να ισχύουν οι σκιώδεις τιμές είναι από 40 μέχρι 80. Η τιμές αυτές προκύπτουν ως εξής: Αν μεταβάλλω τη διαθέσιμη ποσότητα υλικού Β από 60 σε 60+θ τότε η μεταβλητή x1 θα γίνει 10-0,5θ ενώ η μεταβλητή x2 θα γίνει 10+0,5θ (βλ. συντελεστές μετατροπής στήλης s2). Όμως και οι δύο αυτές ποσότητες θα πρέπει να είναι θετικές
10-0,5θ >=0 ➔ = -0,5θ>=-10 ➔ θ>=-20
10+0,5θ>=0 ➔ θ<=20
Άρα προκύπτει ότι οι αποδεκτές τιμές στις οποίες μπορεί να διακυμανθεί η παράσταση 60+θ είναι από 40 μέχρι 80.

δ) Δεν συμφέρει την εταιρεία να παράγει το προϊόν Π3 διότι το προϊόν Π1 αποφέρει το ίδιο κέρδος ανά μονάδα και απαιτεί 2 μονάδες πρώτης ύλης Α και 2 μονάδες πρώτης ύλης Β δηλαδή απαιτεί 1 λιγότερη μονάδα πρώτης ύλης Α και ίδιες μονάδες πρώτης ύλης Β.

Θέμα 3

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Μεγιστοποίηση $z=1200x1 + 900x2$

Περιορισμοί $x1 + x2 <=200$

$2x1 + x2 <=300$

$x1, x2 >=0$

α) Να λυθεί γραφικά

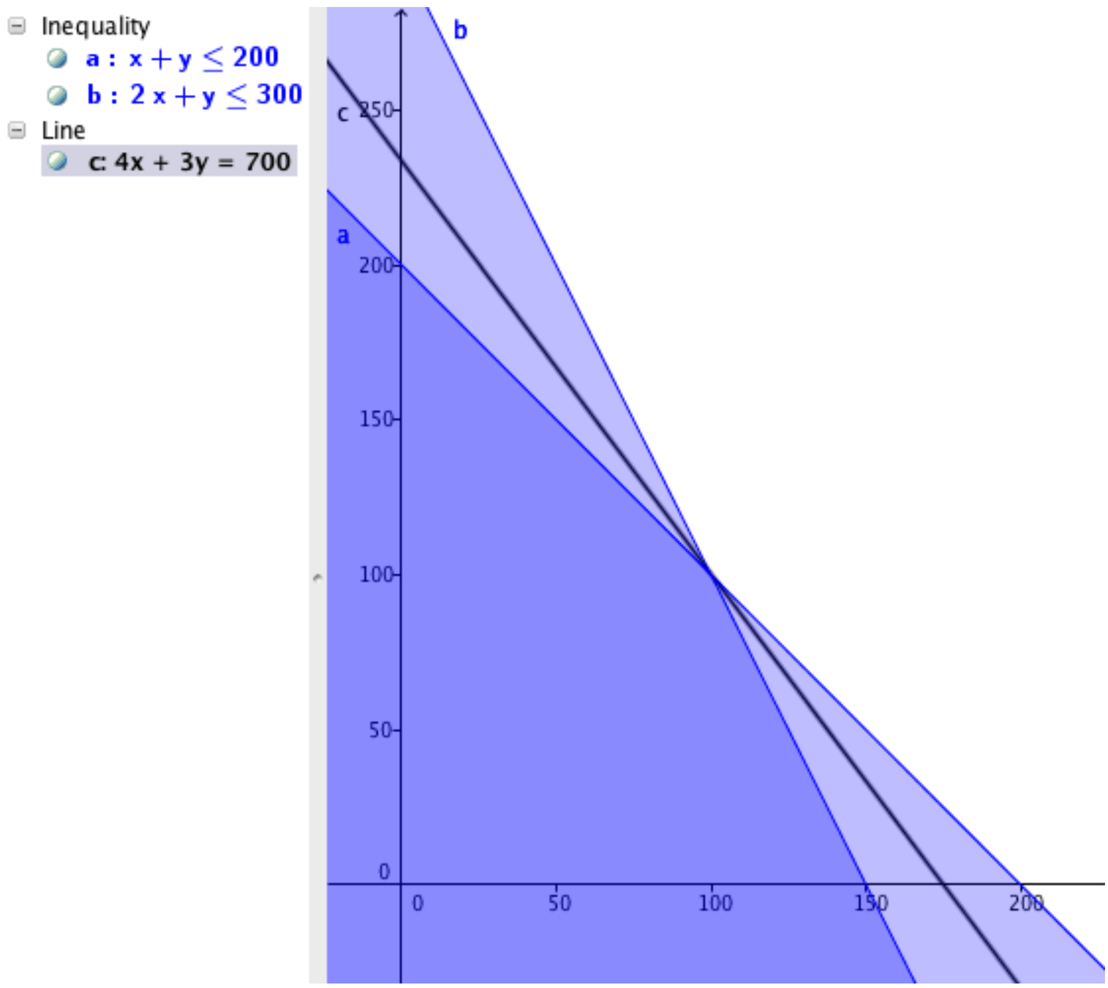
β) Ο παρακάτω πίνακας είναι ένας από τους πίνακες Simplex που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πρόβλημα

Συντελεστής κέρδους	Cj	1200	900	0	0	Ποσότητα
Cj	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bi
0	s1	0	½	1	0	50
1200	x1	1	½	0	½	150
	Zj	1200	600	0	600	
	Cj – Zj	0	300	0	-600	

1. Περιγράψτε τη λύση που δίνει ο παραπάνω πίνακας. Ποια είναι η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
2. Να ελέγξετε αν η λύση που δίνει ο παραπάνω πίνακας είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Εάν δεν είναι, να επαναλάβετε τη μέθοδο Simplex όσες φορές χρειαστεί για να υπολογίσετε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος και την αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Απάντηση:

α) Γραφική επίλυση



β.1) Η λύση που δίνει ο πίνακας είναι:
x1 = 150, x2 =0, z=1200*x1+900x2=1200*150+900*0=180000

β.2) Η λύση που δίνει ο πίνακας δεν είναι η βέλτιστη διότι στη σειρά Cj-Zj υπάρχει θετική τιμή (η τιμή 300 στη στήλη x2). Συνεπώς θα πρέπει να επαναληφθεί η μέθοδος Simplex.
Η μεταβλητή εισόδου θα είναι η x2 ενώ μεταβλητή εξόδου θα είναι η s1 καθώς:
για την υποψήφια μεταβλητή εξόδου s1 ισχύει ότι 50/(1/2) =100
για την υποψήφια μεταβλητή εξόδου x1 ισχύει ότι 150/(1/2) =300
και επιλέγεται η μικρότερη τιμή

Ο νέος πίνακας Simplex ο οποίος είναι και ο τελικός είναι:

Συντελεστής κέρδους	Cj	1200	900	0	0	Ποσότητα
Cj	Βασικές μεταβλητές	x1	x2	s1	s2	Bi
0	x2	0	1	2	0	100
1200	x1	1	0	-1	½	100
	Zj	1200	900	600	600	210000
	Cj – Zj	0	0	-600	-600	

Ο πίνακας είναι ο τελικός διότι όλες οι τιμές στη σειρά Cj-Zj είναι αρνητικές ή μηδέν. Η δε λύση είναι x1 = 150, x2 = 0, z = 210000.

Θέμα 4

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Ελαχιστοποίηση	z = 10,5x1 + 19,5x2
Περιορισμοί	25x1 + 15x2 =7500
	3x1 + 5x2<=1060
	x1-x2 >= 72
	x1, x2 >= 0

Να βρεθεί το δυικό πρόβλημα.

Απάντηση:
Το δυικό πρόβλημα είναι:

Μεγιστοποίηση	7500w1 + 1060w2 + 72w3
	25w1 +3w2+w3 <= 10,5
	15w1 + 5w2-w3 <=19,5
	w1 ελεύθερη μεταβλητή και w2, w3 >=0