

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ 2

### ✚ Μίγμα προϊόντων (product mix)

Σε τέτοιου είδους προβλήματα, ο στόχος της βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί η πιο κερδοφόρα λύση με βάση περιορισμένους πόρους εν συγκρίσει επιθυμητών προϊόντων ή δραστηριοτήτων. Τέτοιου είδους παραδείγματα είναι το προηγούμενο παράδειγμα σκαφών.

### ΑΣΚΗΣΗ: ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΘΛΗΤΙΚΩΝ ΠΑΠΟΥΤΣΙΩΝ

A6		=SUMPRODUCT(C2:E2;C3:E3)						
1	A	B	C	D	E	F	G	H
			BASKETBALL	RUNNING	TENNIS			
2	Ποσότητα Παραγωγής		0	0	0			
3	Κέρδος ανά Μονάδα		10,00 €	9,00 €	7,50 €			
4								
5	Συνολικό Κέρδος							
6								
7								
8			ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΠΡΟΪΟΝ					
9	Πόροι		BASKETBALL	RUNNING	TENNIS	Χρησιμότητα		Διαθεσιμότητα
10	Canvas		2	1	1	0		12000
11	Labor hours		4	2	2	0		21000
12	Machine hours		2	3	2	0		19500
13	Rubber		2	1	2	0		16500

Τι ποσότητες παραγωγής αυξάνουν το συνολικό κέρδος?

Το αποτέλεσμα είναι:

A6		=SUMPRODUCT(C2:E2;C3:E3)						
1	A	B	C	D	E	F	G	H
			BASKETBALL	RUNNING	TENNIS			
2	Ποσότητα Παραγωγής		1500	1500	6000			
3	Κέρδος ανά Μονάδα		10,00 €	9,00 €	7,50 €			
4								
5	Συνολικό Κέρδος							
6								73500
7								
8			ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑ ΠΡΟΪΟΝ					
9	Πόροι		BASKETBALL	RUNNING	TENNIS	Χρησιμότητα		Διαθεσιμότητα
10	Canvas		2	1	1	10500		12000
11	Labor hours		4	2	2	21000		21000
12	Machine hours		2	3	2	19500		19500
13	Rubber		2	1	2	16500		16500

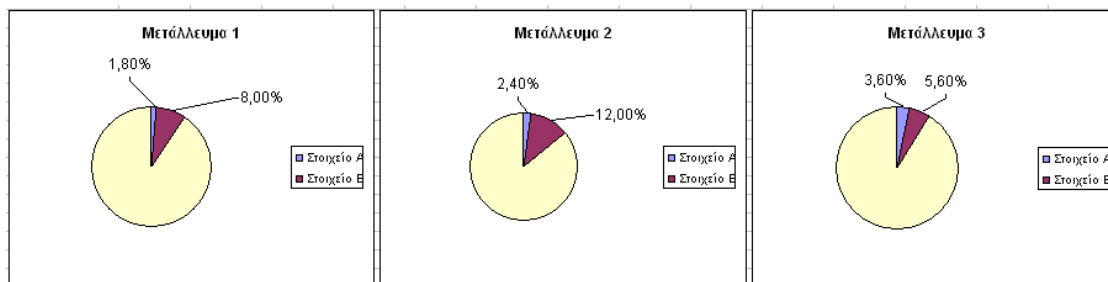
### ✚ Μίξη (blending)

Προβλήματα μίξης εμφανίζονται στην παραγωγή της βενζίνης και άλλων πετρελαιοειδών, χημικών ουσιών, χρωμάτων, κραμάτων, λιπασμάτων και επεξεργασμένων τροφίμων. Αντίθετα από το πρόβλημα μιγμάτων προϊόντων στο οποίο ένα ενιαίο σύνολο πρώτων υλών θα μπορούσε να συνδυαστεί σε πολλούς διαφορετικούς τύπους προϊόντων, εδώ ένας ενιαίος τύπος προϊόντος μπορεί να παραχθεί από πολλούς διαφορετικούς συνδυασμούς πρώτων υλών. Στα προβλήματα συνδυασμού, ο στόχος είναι γενικά να ελαχιστοποιηθεί το

**κόστος ανά μονάδα του τελικού προϊόντος, και οι περιορισμοί πρόκειται να επιβάλουν τα σωστά ποσοστά των συστατικών.**

Στο επόμενο παράδειγμα, τα **διάφορα συστατικά** συνδυάζονται για να **διαμορφώσουν ένα κράμα μετάλλων**. Οι χημικές απαιτήσεις είναι ότι το κράμα πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον 9% του στοιχείου A και μεταξύ 6.5% και 11% του στοιχείου B.

Οι πρώτες ύλες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτό το κράμα είναι τρία μεταλλεύματα με τη χημική ανάλυση που παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα, και το στοιχείο A στην καθαρή μορφή του.



Το κόστος των πρώτων υλών παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο A στην καθαρή μορφή του είναι πολύ ακριβότερο από οποιαδήποτε από τα μεταλλεύματα. **Ο στόχος είναι να καλυφθούν οι χημικές απαιτήσεις με ελάχιστο κόστος ανά τόνο.**

Πρώτη Ύλη	Κόστος ανά Τόνο
Μετάλλευμα 1	50€
Μετάλλευμα 2	60€
Μετάλλευμα 3	40€
Στοιχείο A	8000€

### **Εξερευνώντας το μοντέλο συνδυασμού**

Γράφουμε στο Excel τα παρακάτω δεδομένα:

	A	B	C	D	E	F
1	Προδιαγραφές μεταλλεύματος					
2			Μετάλλευμα 1	Μετάλλευμα 2	Μετάλλευμα 3	Καθαρό Στοιχείο A
3	Ποσοστά στο μείγμα		0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	Κόστος ανά τόνο		50 €	60 €	40 €	8.000 €
5	Ανάλυση					
6		Στοιχείο A	1,80%	2,40%	3,60%	100%
7		Στοιχείο B	8,00%	12,00%	5,60%	0%
8						
9		Απαιτήσεις μίγματος			Συνολικό κόστος ανά τόνο	
10						0,00 €
11		Σύνολο				
12			0%		100%	
13						
14		Πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 9% στοιχείου A'				
15			0%		9%	
16						
17		Πρέπει να περιέχει από 6,5% έως 11% στοιχείου B'				
18			0%		6,50%	
19					11,00%	
20						
21						
22	F10	=SUMPRODUCT(C3:F3;C4:F4)				
23	C12	=SUM(C3:F3)				
24	C15	=SUMPRODUCT(C3:F3;C6:F6)				
25	C18	=SUMPRODUCT(C3:F3;C7:F7)				
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						

Το μετάλλευμα 1 κοστίζει 50€ ανά τόνο.  
 Το μετάλλευμα 2 κοστίζει 60€ ανά τόνο.  
 Το μετάλλευμα 3 κοστίζει 40€ ανά τόνο.  
 Το κόστος του καθαρού στοιχείου A είναι 8.000€ ανά τόνο.

Το μετάλλευμα 1 περιέχει 1,8% στοιχείου A και 8% στοιχείου B.  
 Το μετάλλευμα 2 περιέχει 2,4% στοιχείου A και 12% στοιχείου B.  
 Το μετάλλευμα 3 περιέχει 3,6% στοιχείου A και 5,6% στοιχείου B.

Θα πρέπει να κατασκευαστεί με το μικρότερο κόστος το μίγμα με τις εξής απαιτήσεις:  
 A) τουλάχιστον 9% στοιχείου A  
 B) τουλάχιστον 6,5% και το πολύ 11,00% στοιχείου B

### Η μέθοδος ABC στο μοντέλο Συνδυασμού

- A.** Τα adjustable κελιά ή changing κελιά είναι τα C3:F3 και αντιπροσωπεύουν το ποσοστό κάθε πρώτης ύλης που χρησιμοποιείται στο κράμα.
- B.** Η καλύτερη λύση είναι στο κελί F10 που ελαχιστοποιεί το τελικό κόστος ανά τόνο.
- C.** Οι περιορισμοί είναι οι εξής:
- Το συνολικό ποσοστό δεν θα πρέπει να ξεπερνάει το 100%,
  - Το μίγμα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 9% στοιχείου A.
  - Το μίγμα πρέπει να περιέχει μεταξύ 6.5% και 11% στοιχείου B.
  - Τα adjustable κελιά θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός.

Η ABC μέθοδος αποδίδεται στο πλαίσιο διαλόγου του Excel Solver ως εξής:

Solver Parameters

Set Objective:

To:  Max  Min  Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method  
 Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Options, Help, Solve, Close

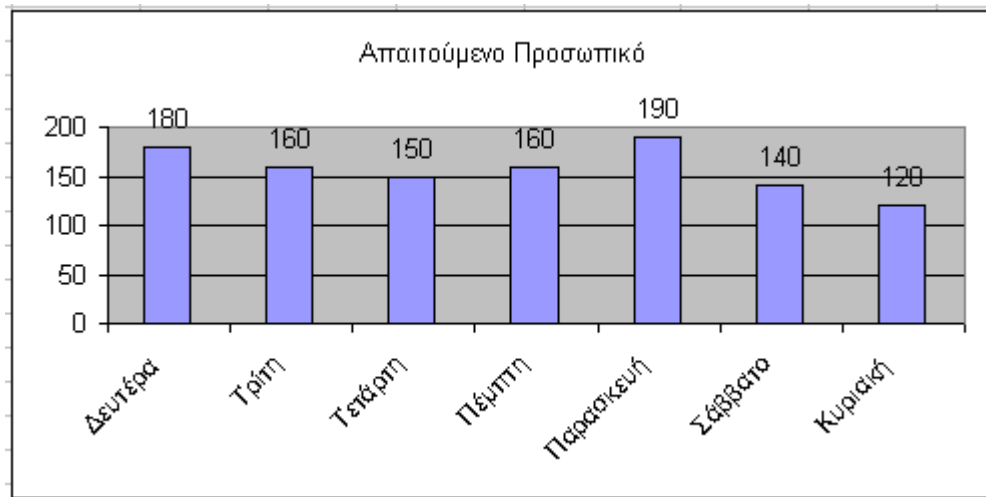
Το αποτέλεσμα είναι:

	A	B	C	D	E	F
1	Προδιαγραφές μεταλλεύματος					
2			Μετάλλευμα 1	Μετάλλευμα 2	Μετάλλευμα 3	Καθαρό Στοιχείο A
3	Ποσοστά στο μείγμα		0,00%	19,17%	74,99%	5,84%
4	Κόστος ανά τόνο		50 €	60 €	40 €	8.000 €
5	Ανάλυση					
6		Στοιχείο A	1,80%	2,40%	3,60%	100%
7		Στοιχείο B	8,00%	12,00%	5,60%	0%
8						
9	Απαιτήσεις μίγματος			Συνολικό κόστος ανά τόνο		
10				508,72 €		
11	Σύνολο					
12			100%		100%	
13						
14	Πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 9% στοιχείου A'					
15			9%		9%	
16						
17	Πρέπει να περιέχει από 6,5% έως 11% στοιχείου B'					
18			7%		6,50%	
19					11,00%	

### Προγραμματισμός προσωπικού (Staff scheduling)

Σε τέτοιου είδους προβλήματα, ο στόχος της βελτιστοποίησης είναι να βρεθούν οι **συγκεκριμένες ανάγκες του εργατικού δυναμικού με ελάχιστο κόστος**. Γενικά το πρόγραμμα πρέπει να ικανοποιεί ορισμένους όρους – όπως εκείνους που επιβάλλονται από τους κανονισμούς – που καθορίζουν την διάρκεια της βάρδιας, των αριθμό διαλειμμάτων εργασίας, ή το μέγιστων όριο ωρών υπερωρίας.

Το παράδειγμα με το οποίο θα ασχοληθούμε αφορά μια επιχείρηση που ανάλογα με το **φόρτο εργασίας που έχει κάθε μέρα της εβδομάδας**, χρειάζεται και το αντίστοιχο προσωπικό το οποίο απ' ότι βλέπουμε κυμαίνεται **από 120 έως 190 ανθρώπους**:



Θα πρέπει όμως να τηρηθούν οι κανονισμοί εργασίας οι οποίοι ορίζουν ότι οι υπάλληλοι θα πρέπει να δουλεύουν πενθήμερο. Οπότε οι συνδυασμοί ημερών είναι: από Δευτέρα μέχρι Παρασκευή, Τρίτη μέχρι Σάββατο, Τετάρτη μέχρι Κυριακή κτλ. Κάθε υπάλληλος θα πληρώνεται **500€ την εβδομάδα**.

#### Εξερευνώντας το μοντέλο του Staff scheduling

Το παραπάνω παράδειγμα θα γραφεί στο Excel ως εξής:

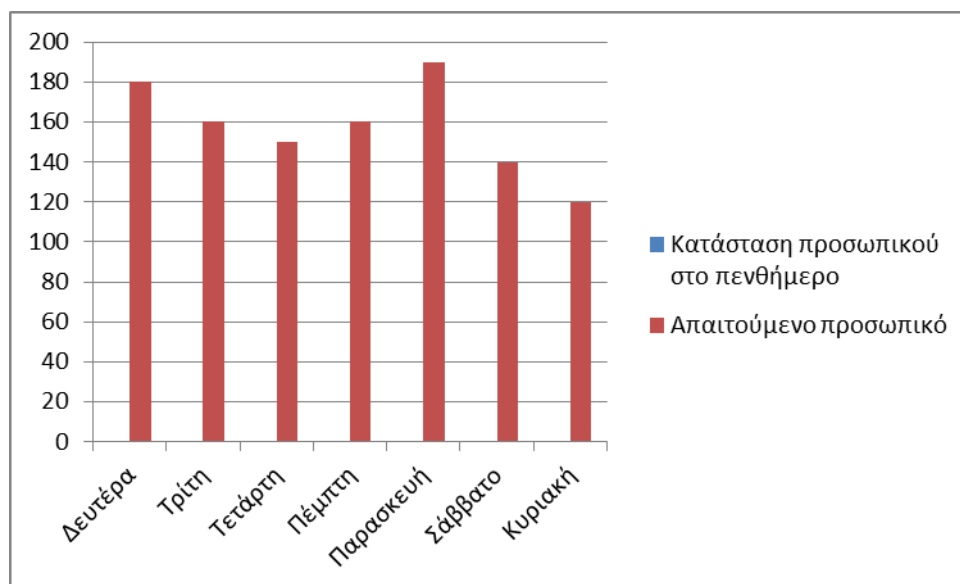
	A	B	C	D	E	F
1						
2	Ελάχιστο κόστος					
3	Προγραμματισμός Προσωπικού					
4						
5						
6		Ημέρες	Κατάσταση προσωπικού στο πενθήμερο		Απαιτούμενο προσωπικό	Αριθμός υπαλλήλων ανά ημέρα
7						
8		Δευτέρα	0		180	0
9		Τρίτη	0		160	0
10		Τετάρτη	0		150	0
11		Πέμπτη	0		160	0
12		Παρασκευή	0		190	0
13		Σάββατο	0		140	0
14		Κυριακή	0		120	0
15						
16			Συνολικός αριθμός υπαλλήλων			0
17			Κόστος ανά εβδομάδα			500 €
18						
19			Συνολικό κόστος			0 €
20						
21	C8	=F8+F14+F13+F12+F11				
22	C9	=F9+F8+F14+F13+F12				
23	C10	=F10+F9+F8+F14+F13				
24	C11	=F11+F10+F9+F8+F14				
25	C12	=F12+F11+F10+F9+F8				
26	C13	=F13+F12+F11+F10+F9				
27	C14	=F14+F13+F12+F11+F10				
28	F16	=SUM(F8:F14)				
29	F19	=F16*F17				

Κάθε υπάλληλος ξεκινά σε μια ημέρα της εβδομάδας και δουλεύει για 5 συνεχόμενες ημέρες.  
Δίνονται οι απαιτήσεις σε αριθμό προσωπικού ανά ημέρα

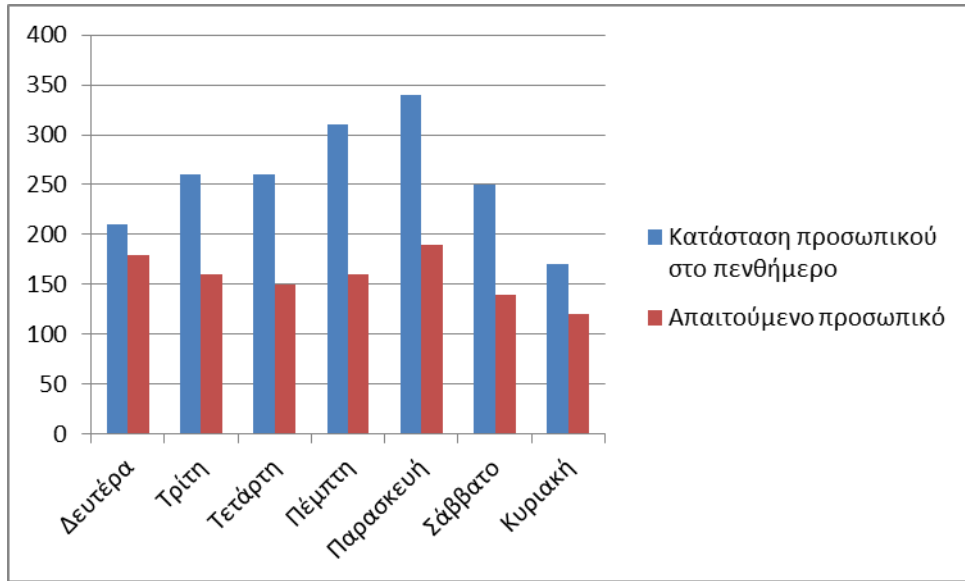
Ζητείται να αποφασιστεί ο αριθμός των υπαλλήλων που θα πρέπει να ξεκινούν την εργασία τους σε κάθε ημέρα.

- Οι αριθμοί των κελιών **F8:F14** αντιπροσωπεύουν τους υπαλλήλους που θα πρέπει να προσληφθούν ανά ημέρα.
- Οι αριθμοί των κελιών **C8:C14** προέρχονται από το **άθροισμα των υπαλλήλων** που χρειάζονται **ανά ημέρα συν των τεσσάρων προηγούμενων** (για να συμπληρωθεί το πενήνήμερο). Π.χ. την Δευτέρα στο κελί F8 γίνεται το άθροισμα των υπαλλήλων που εργάζονται την συγκεκριμένη ημέρα συν των τεσσάρων προηγούμενων (Κυριακή + Σάββατο + Παρασκευή + Πέμπτη) ή διαφορετικά (F8+F11+F12+F13+F14).
- Στο κελί **F16** έχουμε το συνολικό αριθμό των υπαλλήλων που έχουν προσληφθεί, δηλαδή το **άθροισμα των κελιών F8:F14**.
- Στο κελί **F19** βλέπουμε το **συνολικό κόστος** που είναι ο **συνολικός αριθμός των υπαλλήλων που προσελήφθηκαν επί το κόστος ανά εβδομάδα**.

Το γράφημα αντιπροσωπεύει τον αριθμό των υπαλλήλων που χρειάζεται η επιχείρηση ανά ημέρα.



**Δοκιμάζοντας** διάφορες τιμές στο «πόσοι υπάλληλοι θα εργαστούν καθημερινά», δηλαδή στα κελιά **F8:F14**, παίρνουμε και τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο κόστος. Επίσης στο γράφημα άλλοτε είμαστε με πολλοί περισσότερους υπαλλήλους απ' ό,τι χρειαζόμαστε και άλλοτε με πολύ λιγότερους. Π.χ. το επόμενο γράφημα προκύπτει από δοκιμές τέτοιων τυχαίων αριθμών:



Για να βρούμε όμως τον κατάλληλο συνδυασμό των υπαλλήλων που δεν θα ξεπερνάνε τον αριθμό που απαιτείται και θα ελαχιστοποιεί το κόστος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ABC χρησιμοποιώντας το πακέτο Excel Solver.

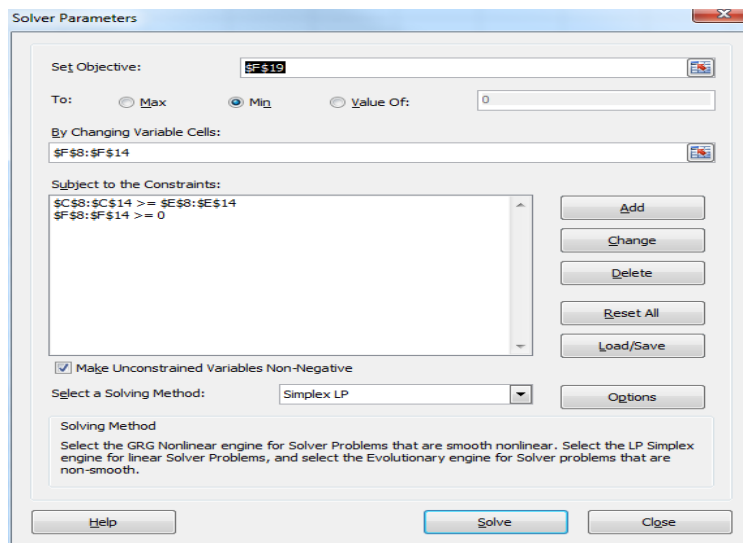
### Η μέθοδος ABC

**A.** Τα **adjustable** κελιά είναι τα **F8:F14**

**B.** Η καλύτερη λύση είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος, άρα το κελί **F19**

**C.** Οι περιορισμοί είναι:

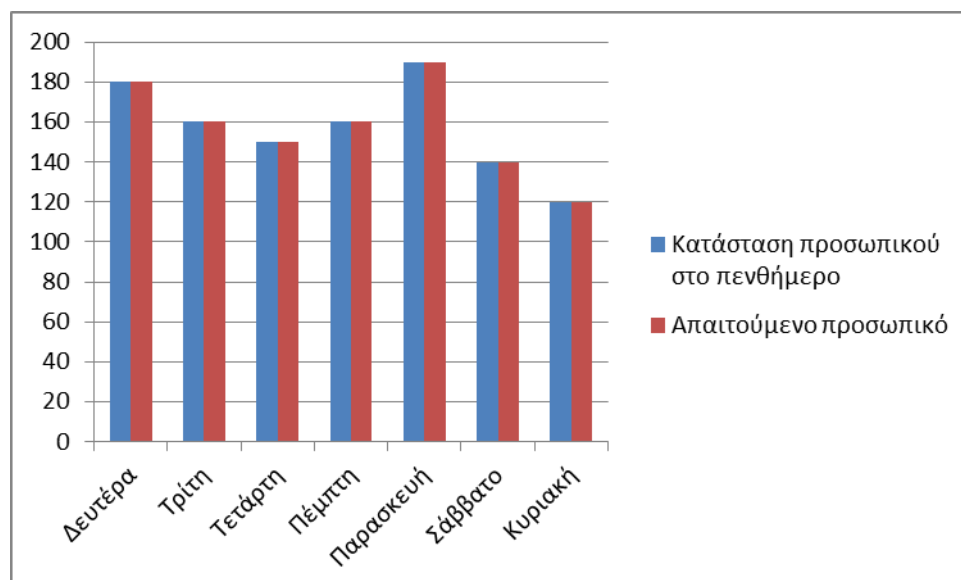
- Ο αριθμός των υπαλλήλων στο πενθήμερο (C8:C14) θα πρέπει να είναι **τουλάχιστον τόσο μεγάλος όσο ο αριθμός των υπαλλήλων που απαιτείται** (E8:E14).
- Τα adjustable κελιά να είναι θετικοί αριθμοί.





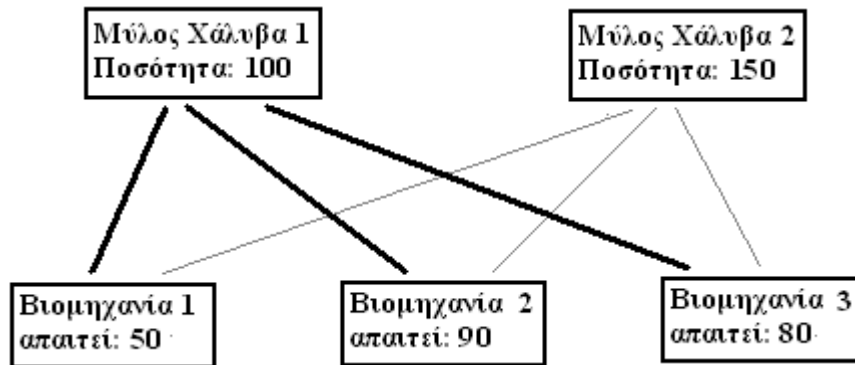
Το αποτέλεσμα είναι:

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Ελάχιστο κόστος					
3	Προγραμματισμός Προσωπικού					
4						
5						
6		Ημέρες	Κατάσταση προσωπικού στο πενθήμερο		Απαιτούμενο προσωπικό	Αριθμός υπαλλήλων ανά ημέρα
7						
8		Δευτέρα	180		180	80
9		Τρίτη	160		160	20
10		Τετάρτη	150		150	20
11		Πέμπτη	160		160	40
12		Παρασκευή	190		190	30
13		Σάββατο	140		140	30
14		Κυριακή	120		120	0
15						
16			Συνολικός αριθμός υπαλλήλων			220
17			Κόστος ανά εβδομάδα			500 €
18						
19			Συνολικό κόστος			110.000 €



## ✚ Μεταφορά (transportation)

Αυτού του είδους τα προβλήματα είναι από τα πιο απλά και είναι γνωστά ως προβλήματα δικτύων. Αυτά συμπεριλαμβάνουν γενικά τη μεταφορά των αγαθών μέσω των δικτύων μεταφορών, π.χ. του πετρελαίου ή του αερίου μέσω συστημάτων σωληνώσεων. Σε αυτό το μοντέλο, δύο μύλοι χάλυβα προμηθεύουν τρεις βιομηχανικές εγκαταστάσεις. Κάθε βιομηχανία έχει συγκεκριμένες απαιτήσεις χάλυβα και ο κάθε μύλος έχει περιορισμένη ποσότητα χάλυβα. Όπως δείχνει το σχήμα:



Τα έξοδα αποστολής από τους μύλους σε κάθε βιομηχανία εγκατάστασης είναι τα εξής:

	Από:	
Στη:	Μύλος Χάλυβα 1	Μύλος Χάλυβα 2
Βιομηχανία 1	200€	500€
Βιομηχανία 2	300€	400€
Βιομηχανία 3	500€	600€

Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθούν τα έξοδα αποστολής ικανοποιώντας όλη την ζήτηση χωρίς υπέρβαση στις ποσότητες χάλυβα των μύλων.

### Εξερευνώντας το μοντέλο του Transportation

Το παραπάνω παράδειγμα θα γραφεί στο Excel ως εξής:

	A	B	C	D	E	F	G	I
1								
2								
3								
4	Συνολικές μονάδες που μεταφέρθηκαν	Από το Μύλο 1	Από το Μύλο 2		Συνολική ποσότητα που μεταφέρθηκε από τους μύλους		Απαιτήσεις από τις βιομηχανίες	
5	Προς							
6	Βιομηχανία 1	0	0		0		50	
7	Βιομηχανία 2	0	0		0		90	
8	Βιομηχανία 3	0	0		0		80	
9								
10	Σύνολο από τους μύλους	0	0					
11								
12	Μέγιστη δυνατότητα παραγωγής των μύλων	100	150					
13							Συνολικό κόστος μεταφοράς	
14	Κόστος μεταφοράς ανά τόνο	Από το Μύλο 1	Από το Μύλο 2				0	
15	Προς							
16	Βιομηχανία 1	200 €	500 €					
17	Βιομηχανία 2	300 €	400 €					
18	Βιομηχανία 3	500 €	600 €					
19								
20	E6	=SUM(B6:C6)						
21	E7	=SUM(B7:C7)						
22	E8	=SUM(B8:C8)						
23	B10	=SUM(B6:B8)						
24	C10	=SUM(C6:C8)						
25	G14	=SUMPRODUCT(B6:C8;B16:C18)						

Δίνονται:

α) τα κόστη μεταφοράς από κάθε μύλο προς κάθε βιομηχανία.

β) οι απαιτήσεις των βιομηχανιών σε τόνους αλευριού

γ) οι δυνατότητες παραγωγής κάθε μύλου σε τόνους

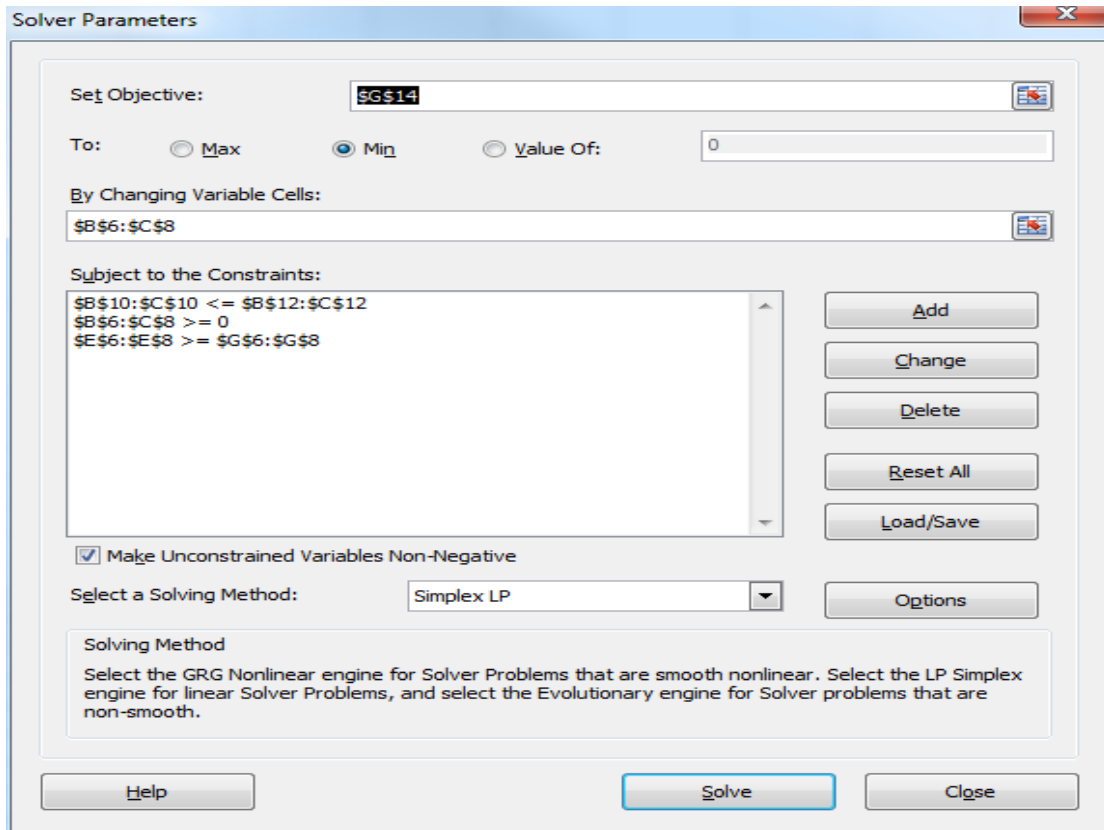
Ζητείται η ποσότητα αλευριού που θα μεταφερθεί από κάθε Μύλο προς κάθε Βιομηχανία με το μικρότερο συνολικό κόστος μεταφοράς.

- Η ποσότητα που μεταφέρθηκε από κάθε μύλο σε κάθε βιομηχανία αναγράφεται στα κελιά **B6:C8**.
- Τα κόστη μεταφοράς ανά τόνο είναι καταχωρημένα στα κελιά **B16:C18**.
- Στο κελί **G14** είναι γραμμένος ο τύπος **SUMPRODUCT(B6:C8;B16:C18)** και δηλώνει το **συνολικό κόστος μεταφοράς**.
- Στα κελιά **E6:E8** έχουμε το **σύνολο των αποστολών και των δύο μύλων**.
- Η **συνολική παραγωγή** κάθε μύλου εμφανίζεται στα κελιά **B10:C10**.

### Η μέθοδος ABC

- Τα **adjustable** κελιά είναι τα **B6:C8**
- Η καλύτερη λύση είναι να **ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς**, άρα το κελί **G14**
- Οι **περιορισμοί** είναι:
  - ο Η **συνολική ποσότητα** που μεταφέρεται από τους μύλους (E6:E8) θα πρέπει να είναι **τουλάχιστον τόσο μεγάλη όσο οι απαιτήσεις** από τις Βιομηχανίες (G6:G8).

- ο Το σύνολο μεταφοράς από κάθε μύλο να μην ξεπερνάει την μέγιστη χωρητικότητα των μύλων.
- ο Τα adjustable κελιά να είναι θετικοί αριθμοί.



Το αποτέλεσμα είναι:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4	Συνολικές μονάδες που μεταφέρθηκαν	Από το Μύλο 1	Από το Μύλο 2		Συνολική ποσότητα που μεταφέρθηκε από τους μύλους		Απαιτήσεις από τις βιομηχανίες
5	Προς						
6	Βιομηχανία 1	50	0		50		50
7	Βιομηχανία 2	0	90		90		90
8	Βιομηχανία 3	50	30		80		80
9							
10	Σύνολο από τους μύλους	100	120				
11							
12	Μέγιστη δυνατότητα παραγωγής των μύλων	100	150				
13							Συνολικό κόστος μεταφοράς
14	Κόστος μεταφοράς ανά τόνο	Από το Μύλο 1	Από το Μύλο 2				89000

## Άσκηση 1

Μια εταιρία παρασκευάζει ένα αναψυκτικό με γεύση πορτοκαλί συνδυάζοντας σόδα πορτοκαλιού και χυμό πορτοκαλιού. Κάθε γραμμάριο σόδας πορτοκαλιού περιέχει 0,5 mg ζάχαρη και 1 mg βιταμίνης C. Κάθε γραμμάριο χυμού πορτοκαλιού περιέχει 0,25 mg ζάχαρη και 3 mg βιταμίνης C. Το κόστος παραγωγής ενός γραμμαρίου σόδας πορτοκαλιού είναι 2 € ενώ ενός γραμμαρίου χυμού πορτοκαλιού είναι 3 €. Το τμήμα μάρκετινγκ της εταιρίας αποφάσισε ότι κάθε μπουκάλι του αναψυκτικού πρέπει να περιέχει το πολύ 36 mg βιταμίνης C και το πολύ 4 mg ζάχαρης. Λύστε το πρόβλημα με γραμμικό προγραμματισμό ώστε να ικανοποιηθούν οι ανάγκες της εταιρίας με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αν κάθε μπουκάλι αναψυκτικού περιέχει το πολύ 20 mg βιταμίνης C, πως μεταβάλλονται οι επιλογές της εταιρίας;

## Άσκηση 2

Μια βιομηχανία κατασκευάζει δύο τύπου καναπέδων (κανονικό και μεγάλο) στα εργοστάσιά της στην Αθήνα και Λάρισα. Στην Αθήνα το εργοστάσιο μπορεί να παράγει καθημερινά 300 καναπέδες οποιαδήποτε μεγέθους με προϋπολογισμό κόστους 45.000 €. Γνωρίζουμε ότι στο εργοστάσιο της Αθήνας κοστίζει 150 € ο κανονικός καναπές και 200€ ο μεγάλος. Στο εργοστάσιο της Λάρισας ο προβλεπόμενος ημερήσιος προϋπολογισμός είναι 36.000 € και μπορεί να παράγει το πολύ 250 καναπέδες οποιαδήποτε μεγέθους. Η ζήτηση της αγοράς απαιτεί ότι η παραγωγή σε κανονικούς καναπέδες δεν θα πρέπει να ξεπερνά τους 250 και σε μεγάλους τους 350. Το κέρδος ανά καναπέ είναι 50 για τους κανονικούς και 70 για τους μεγάλους. Πόσους καναπέδες πρέπει να παράγει ημερησίως ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος.